第 34 卷　第 4 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.4
2005 年 8 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Aug. 2005

# 4$n$–2阶发展方程的算子半群

张利勋[1]，刘永智[1]，王康宁[2]，欧中华[1]，代志勇[1]，彭增寿[1]
(1. 电子科技大学光电信息学院　成都　610054;　2. 电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】针对高价发展方程的形式解，将二阶发展方程扩展为时滞分布参数系统标准型中的4$n$–2阶发展方程，同时构造内积形成4$n$–2维Hilbert空间。将4$n$–2阶发展方程转化为一阶发展方程组，求得4$n$–2阶发展方程的生成算子和在一定的条件下生成半群。构造出半群的结构式并证明其具有的基本特征。当$n$=1时为二阶发展方程型的Golstein算子半群。

关　键　词　半群;　生成算子;　Hilbert空间;　时滞分布参数系统
中图分类号　O177.1　　　文献标识码　A

# Operator Semigroup of 4*n*–2 Order Evolution Equations

ZHANG Li-xun[1]，LIU Yong-zhi[1]，WANG Kang-ning[2]，OU Zhong-hua[1]，DAI Zhi-yong1，PENG Zeng-shou[1]
(1. School of Optic-Electronic Information, UEST of China　Chengdu　610054;　2. School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

**Abstract**　In allusion to the form solution to high order evolution equation, 4$n$–2 order evolution equation that is one of the best important standard type about time-delay distributed parameter system expand from two order evolution equation and construct the inner product to become 4$n$–2 dimension Halberd space at the same time. The generating operator of 4$n$–2 order evolution equation is obtained and it generates a semigroup when 4$n$–2 order evolution equation is changed into one order evolution equation set. The configuration form's semigroup is constructed and it's basic character is proved. In particular, the semigroup($n$=1) intitules Golstein's .

**Key words**　semigroup;　generating operator;　Halberd space;　time-delay distributed parameter system

由泛函微分系统与偏微分系统的相互渗透而产生的时滞分布参数系统从20世纪50年代开始研究，70年代逐渐活跃起来，至今已形成一个重要的分支[1~3]。其研究方法主要有：直接分析方法、紧致性方法、单调性方法、补偿紧致方法、半群方法。半群方法是把具体的实际系统转化成抽象的发展方程(又称演化方程或进化方程)，在Sobolev空间中利用半群理论获得结论，再将结果转化回原系统。实际系统通常指包含时间变数$t$的数学物理偏微分方程，如波动方程、热传导方程、薛定愕方程、流体动力学方程组、KdV方程、反应扩散方程等通过适当方式耦合的各种耦合方程组，把它们转化为一阶或二阶发展方程。近年来，非线性光纤光学由于在设计超容量光通信系统中的重要作用，发展迅速。非线性光纤光学原理用时域的偏微分、积分方程表示，可描述为某种时滞分布参数系统，这些方法均可以用。当单信道比特率超过100 Gb/s时，每个比特通道必须采用超短脉冲(脉宽≤1 ps)，考虑3次或高次非线性效应等方面的影响[4]，即研究的理论模型已突破二阶发展方程的范围，需要相应的高阶发展方程理论。本文在文献[5]基础上，讨论了4$n$–2阶发展方程

收稿日期：2003 – 04 – 22
基金项目：国防预研基金资助项目(AD0501012)
作者简介：张利勋(1968 – )，男，讲师，在职博士生，主要从事非线性光学及光电信息处理方面的研究.

的算子半群，得到了$4n-2$阶发展方程的形式解。

## 1 4*n*-2阶发展方程

文献[5]寻找到发展方程$\mathrm{d}^n x/\mathrm{d}t^n = \boldsymbol{A}x + f\,(n\in N)$的生成算子生成的算子半群。高阶发展方程的标准型并不多，其中最重要的是：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^{4n-2}x}{\mathrm{d}t^{4n-2}} + \boldsymbol{A}x = f \\ x(0)=x_0, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = x_1, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}x_{4n-3}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = x_{4n-2} \end{cases} \tag{1}$$

式中 方程右边为输入条件，左边为系统处理区。阶数不再是任何正整数，而是$4n-2\,(n\in N)$，该方程具有系统论的典型特征。本文的目的在于获得方程(1)的生成算子生成的算子半群。

## 2 Hilbert 空间

条件 1 $\exp(t\boldsymbol{A})$；$t\geq 0\}$是Banach空间$\boldsymbol{E}$中自伴稠定算子$\boldsymbol{A}$生成的半群，零点在预解集$\rho(\boldsymbol{A})=\{\lambda:\lambda$使$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$为正则算子$\}$中。

对任何$\boldsymbol{E}$中的稠定算子$\boldsymbol{B}$，记$\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{m-1}, \boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{I}, m=1,2,\cdots,n$，$\boldsymbol{I}$是$\boldsymbol{E}$中恒等算子，在定义域$D(\boldsymbol{B}^m)=\{x:\boldsymbol{B}^m x\in\boldsymbol{E},\forall x\in\boldsymbol{E}\}$上引入范数: $\|x\|_{\boldsymbol{B}^m}=(<x,x>+<\boldsymbol{B}^m x,\boldsymbol{B}^m x>)^{\frac{1}{2}},\forall x\in D(\boldsymbol{B}^m)$。容易证明$D(\boldsymbol{B}^m)$在该范数$\|\cdot\|_{\boldsymbol{B}^m}$下是一个Banach空间。记$\boldsymbol{E}_n=D(\boldsymbol{B}^{n-1})\times\cdots\times D(\boldsymbol{B}^2)\times D(\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{E}$，在$\boldsymbol{E}_n$上引入范数：$\forall \boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\tau\in\boldsymbol{E}_n$, $\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}=(\sum_{j\in J}\|x_j\|^2_{\boldsymbol{B}^{n-j}}+\|x_n\|^2)^{1/2}$。$\boldsymbol{E}_n$在范数$\|\cdot\|_{\boldsymbol{E}_n}$下是一个Banach空间。记$D(M_n)=D(\boldsymbol{B}^n)\times\cdots\times D(\boldsymbol{B}^2)\times D(\boldsymbol{B})$,容易证明$D(\boldsymbol{M}_n)$在$\boldsymbol{E}_n$中稠密。Banach空间$\boldsymbol{E}_n$在内积$<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>=\|\boldsymbol{y}\|^2_{\boldsymbol{E}_n}$下是Hilbert空间。

## 3 生成算子

方程(1)中假定$x=x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\cdots,\dfrac{\mathrm{d}x_{4n-3}}{\mathrm{d}t}=x_{4n-2}$，方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ -\boldsymbol{A} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}$。其中，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_{4n-2})^\tau$，$\boldsymbol{F}=(0,0,\cdots,f)^\tau$，$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$。方程(1)中$\boldsymbol{A}$满足条件1，由谱分解定理得$\boldsymbol{A}=\int_\varepsilon^\infty\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda$，记$\boldsymbol{B}=\int_\varepsilon^\infty\lambda^{1/(4n-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda$，$\{\boldsymbol{E}_\lambda:0\leq\varepsilon<\lambda<\infty\}$是$\boldsymbol{A}$的谱族，则$\boldsymbol{B}$也是自伴稠定算子。$-\boldsymbol{A}=(\mathrm{i}\boldsymbol{B})^{4n-2}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，记$\boldsymbol{M}_n=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ -\boldsymbol{A} & 0\end{bmatrix}_{4n-2}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ (\mathrm{i}\boldsymbol{B})^{4n-2} & 0\end{bmatrix}_{4n-2}$，如果$\mathrm{i}\boldsymbol{B}$具有条件1，那么$\boldsymbol{M}_n$是方程(1)的生成算子，$\boldsymbol{I}_{4n-3}$是$4n-3$阶恒等矩阵算子。

## 4 结论陈述

如果$\boldsymbol{A}$满足条件1，则$\boldsymbol{M}_n$具有定义域$D(\boldsymbol{M}_n)=D(\boldsymbol{A})\times D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})\subseteq\boldsymbol{E}_n=D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})\times\boldsymbol{E}$，并且$\boldsymbol{M}_n$在$\boldsymbol{E}_n$上生成半群$\{\exp(t\boldsymbol{M}_n);t\geq 0\}$。

$$\exp(t\boldsymbol{M}_n)=\frac{1}{4n-2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{A}^{-k/(4n-2)}\exp(t\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})-\pi k\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k}\\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}$$

## 5 结论证明

记$\boldsymbol{U}=\mathrm{i}\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{U}^*=-\boldsymbol{U}$，$-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{4n-2}$。$\forall\lambda>0$，记$R(\lambda,\boldsymbol{U})=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U})^{-1}$，那么$\forall x\in\boldsymbol{E}$，

$$\| R(\lambda,\boldsymbol{U})x\|^2=\int_\delta^\infty \frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{E}_\mu x\|^2}{|\lambda-\mathrm{i}\mu|^2}\le\frac{1}{\lambda^2}\int_\delta^\infty \mathrm{d}\|\boldsymbol{E}_\mu x\|^2=\frac{1}{\lambda^2}\|x\|^2$$

所以$\|R(\lambda,\boldsymbol{U})\|\le\dfrac{1}{\lambda}$，由文献[3]得算子$\boldsymbol{U}$生成半群$\{\exp(t\boldsymbol{U})\,;\,t\ge 0\}$。由文献[5]得：

$$\exp(t\boldsymbol{M}_n)=\frac{1}{4n-2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{U}^{-k}\exp(t\boldsymbol{U}\exp(\mathrm{i}\frac{2m}{4n-2}\pi)-\mathrm{i}k\frac{2m}{4n-2}\pi)\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k}\\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{4n-2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{A}^{-k/(4n-2)}\exp(t\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})-\pi k\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k}\\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}$$

首先证明$D(\boldsymbol{M}_n)\subseteq\boldsymbol{E}_n$：$\forall\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_{4n-2})^\tau\in\boldsymbol{E}_n$，记$\theta=\exp(2\pi\mathrm{i}/(4n-2))$及$\boldsymbol{A}_k=1/(4n-2)\times\sum_{m=0}^{4n-3}(\mathrm{i}\theta^m\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})^{-k}\exp(\theta^m t\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})$，直接计算得：

$$\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}=(\cdots,\sum_{m=4n-k-1}^{4n-3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_m x_{m-4n+k+2}+\sum_{m=0}^{4n-k-2}\boldsymbol{A}_m x_{m+k}-x_k,\cdots)^\tau\qquad k=1,2,\cdots,4n-2$$

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(\boldsymbol{A}_0x_j-x_j)=\frac{1}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-3}(\theta^m\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})x_j=0,\ \lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\boldsymbol{A}_1x_j=$$

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}-\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{-1/(4n-2)}\frac{1}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-2}\theta^{-m}(\exp(\mathrm{i}t\theta^m\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})x_j-x_j)=$$

$$-\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{-1/(4n-2)}\frac{1}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-2}(\theta^{-m}\mathrm{i}\theta^m\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})x_j=x_j,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\boldsymbol{A}_kx_j=0\qquad k=2,3,\cdots,4n-2,\quad j=1,2,\cdots,4n-2$$

故$\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}(\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})=(x_2,x_3,\cdots,x_n,-\boldsymbol{A}x_1)^\tau=\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{y}$，即$D(\boldsymbol{M}_n)\subseteq\boldsymbol{E}_n$并且$\{\exp(t\boldsymbol{M}_n):t\ge 0\}$的生成算子为$\boldsymbol{M}_n$。下面证明$D(\boldsymbol{M}_n)$的定义域为$D(\boldsymbol{A})\times D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/4n-2})\infty$。

设$\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}(\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})=(V_1,V_2,\cdots,V_{4n-3},V_{4n-2})^\tau$，由上面求极限的结果得：

$$(V_1,V_2,\cdots,V_{4n-3},V_{4n-2})^\tau=(x_2+\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{(1-4n)/(4n-2)}\boldsymbol{A}_{4n-3}x_{4n-2},\cdots,\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{-1/(4n-2)}\boldsymbol{A}_1x_{4n-2},\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{(4n-1)/(4n-2)}\times$$
$$\boldsymbol{A}_1x_1+\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}(\boldsymbol{A}_0x_n-x_n))^\tau$$

因为$V_{4n-3}\in D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})$，且$V_{4n-3}=\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}(\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{-1/(4n-2)}\boldsymbol{A}_1x_{4n-2}=x_{4n-2}\in\boldsymbol{E}$，所以$x_{4n-2}\in D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})$，同样得$x_j\in D(\boldsymbol{A}^{(4n-2-j)/(4n-2)}),\ j=1,2,\cdots,4n-3$。即证明$D(\boldsymbol{M}_n)$的定义域为：

$$D(\boldsymbol{A})\times D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})$$

$n$=1时：

$$\exp(t\boldsymbol{M}_1)=\cosh(t\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{1/2})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}-\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{-1/2}\sinh(t\mathrm{i}\boldsymbol{A}^{1/2})\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}\\-\boldsymbol{A}&0\end{pmatrix}$$

式中　$\cosh(t\boldsymbol{A}^{1/2})=(\exp(t\boldsymbol{A}^{1/2})+\exp(-t\boldsymbol{A}^{1/2}))/2,\ \sinh(t\boldsymbol{A}^{1/2})=(\exp(t\boldsymbol{A}^{1/2})-\exp(-t\boldsymbol{A}^{1/2}))/2$。$\exp(t\boldsymbol{M}_1)$是第二类Golstein半群[1]。(注：$\boldsymbol{A}^{1/2}$算子生成半群，只有i $\boldsymbol{A}^{1/2}$算子生成半群，由此$x^k=-1$的$k$只能是4$n$–2形式)。

## 参 考 文 献


[1] Golstein J. A. Semigroups and second-order differential equations[J]. Func Anal, 1969, 4: 50-70

[2] 李大潜, 陈韵梅. 非线性发展方程[M]. 北京: 科学出版社, 1997

[3] 王康宁. 分布参数控制系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986. 30-78

[4] Govind P A. Nonlinear fiber optics &applications[M]. New York: ACZDEMIC Press, 2002. 41-60

[5] 张利勋, 王康宁. 算子半群和$n$阶发展方程的积分[J]. 科学通报, 1997, 42(8): 797-800


编 辑 漆 蓉