带状方程组并行列处理法贪心方法

杨本立，李安志，赵国伟
(中国工程物理研究院工学院　四川 绵阳　621900)

【摘要】利用列处理法贪心方法和分治策略，给出了一种求解任意相容性带状方程组的解或任意不相容性带状方程组最小二乘解的消息传递多指令流多数据流并行迭代解法，分析了解法的收敛性、计算复杂性和数值稳定性。该方法能使得各处理机上的负载基本平衡，得到了理想的加速比和并行效率。

关　键　词　带状方程组；消息传递并行迭代算法；列处理法贪心方法；分治策略；

中图分类号　O241.6；O246　　　**文献标识码**　A

Parallel Column Action Method with Greedy Method for Band System of Linear Equations

YANG Ben-li，LI An-zhi，ZHAO Guo-wei
(CAEP Institute of Technology　Sichuan Mianyang　621900)

Abstract　This paper utilizes the column action method with the greedy method and the dividing-Conquering strategy to put forward a message passing multiple instruction stream-multiple data stream (MIMD) parallel iterative method for determining the solution of arbitrary consistent band system of linear equations or the least squares solution of arbitrary inconsistent band system of linear equations, also analyzes its convergence and its computational complexity, so its numerical stability. Moreover, the method in this paper con make roughly balance of the computation workload to each processor, hence can obtained ideal speed-up and parallel efficiency.

Key words　band system of linear equations;　message passing parallel iterative algorithm; column action method with greedy method;　dividing-conquering strategy

1　预备知识

定义 1[1, 2]　设有线性方程组 $[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]$，$r_{\min}=\min\limits_{X\in R^{m\times1}}\left\{\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{b}\|_2\right\}$。当 $\|\boldsymbol{AX}^*-\boldsymbol{b}\|_2=r_{\min}$ 时称 $\boldsymbol{X}^*$ 为 $[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]$ 的一个解。

定义 2[1]　设有线性方程组 $[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\,|\cdots|\,\boldsymbol{\alpha}_j\,|\cdots|\,\boldsymbol{\alpha}_m]$，$\boldsymbol{\alpha}_j\in\boldsymbol{R}^{n\times1}$。对给定的正整数 $q\,(1<q<m)$,称算法 G_c 为 $[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]$ 的分组方法，如果：

1) $s=1,2,\cdots q$；

2) 生成子方程组 $s:[\boldsymbol{A}_s\,|\,\boldsymbol{b}]$，使其满足: (1) $\boldsymbol{A}=\bigcup\limits_{s=1}^{q}\boldsymbol{A}_s$；(2) 对 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{b}$,有 $\boldsymbol{X}=\bigoplus\limits_{s=1}^{q}\boldsymbol{X}_s$ ($\oplus$ 是直和运算)；(3) 记 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 为 $\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{b}$ 为 $\sum\limits_{i=1}^{m_s}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{b}$，有 $j=s+q\,(i-1)$。

收稿日期：2003 – 10 – 15
基金项目：中国工程物理研究院科学技术基金资助项目(20020656)
作者简介：杨本立(1947 –)，男，副教授，主要从事数值代数方面的研究.

记分组过程为：

$$([\boldsymbol{A}_s \mid \boldsymbol{b}], n, m_s) = G_c([\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}], n, m, q)$$

2 并行列处理法贪心方法

定义 3 设有带状方程组$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$，$\boldsymbol{A} \in R^{m\times m}$，$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1 | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_j | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_m]$，$\boldsymbol{\alpha}_j \neq 0 (j = 1,2,\cdots,m)$，$\boldsymbol{b} \in R^{m\times 1}$，并设其带宽不大于$q(1<q<m)$，称算法$P_{C-G}$为求解$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$的并行列处理法贪心方法：1) 划分：$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ $([\boldsymbol{A}_s|\boldsymbol{b}], m, m_s) = G_c([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}], m, m, q)$；2) 列法式化及迭代初值：对于每一$s$ $(1\leqslant s\leqslant q)$并行执行[(1)对$i$=1,2,⋯,$m_s$作 $[f_i = 1/\|\boldsymbol{\alpha}_i\|_2$；$\boldsymbol{\alpha}_i = f_i\boldsymbol{\alpha}_i]$；(2) $\boldsymbol{X}_s^0 = 0$；(3) $\boldsymbol{Y}^0 = 0$]；

3) 列处理法贪心方法：(1) 读入 ε；(2) $d = +\infty$；(3) $k = 0$；(4) 若 $d > \varepsilon$ 作[(1) 对于每一s $(1\leqslant s\leqslant q)$并行执行$[\boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{0}$；$\overline{\boldsymbol{Y}}_0 = \boldsymbol{Y}^k$；$d_s = 0$；对$i$=1,2,⋯,$m_s$作 $[t_i = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{i-1})$；$d_s = d_s + t_i^2$；$x_i = x_i + t_i$；$\overline{\boldsymbol{Y}}_i = \overline{\boldsymbol{Y}}_{i-1} + t_i\boldsymbol{\alpha}_i$]；(2) $r = \min\limits_{\omega}\{\omega | \omega \in \{1,2,\cdots,q\}, d_\omega = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\{d_s\}\}$；(3) d=d_r；(4)Yk+1=Y $\boldsymbol{Y}^{k+1} = \boldsymbol{Y}_r^{k+1}$；(5) 对于每一$s$ $(1\leqslant s\leqslant q)$并行执行，如果$s = r$则$\boldsymbol{X}_s^{k+1} = \boldsymbol{X}_s^k + \boldsymbol{X}_s$ 否则$\boldsymbol{X}_s^{k+1} = \boldsymbol{X}_s^k$；⑥ $k = k+1$；

4) 解向量$\boldsymbol{X}^*$：(1) 对于每一s $(1\leqslant s\leqslant q)$并行执行 $\boldsymbol{X}_s^* = (f_1x_1, \cdots, f_ix_i, \cdots, f_{m_s}x_{m_s})^T$；(2) $\boldsymbol{X}^* = \bigoplus\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\boldsymbol{X}_s^*$；(3) $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y}^k$；记求解过程为：

$$(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*) = P_{C-G}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}], m, m, q, \boldsymbol{X}^0).$$

定理 1 设有带状方程组$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$，$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m\times m}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{m\times 1}$，并且$\boldsymbol{A}$的带宽不大于$q(1<q<m)$.对求解过程$(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*) = P_{C-G}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}], m, m, q, \boldsymbol{X}^0)$有：1) $\lim\limits_{k\to+\infty}\|\boldsymbol{Y}^k - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = r_{\min}$，2) 记第$k$次$d$值为$d(k)$则$\left|\,\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^k - \boldsymbol{b}\|_2 - r_{\min}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow d(k) \leqslant \varepsilon$。

证明 步骤如下：

1) 记问题初始为求解$\|\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{b}\|_2 = r_{\min}$，$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1 | \cdots | \boldsymbol{\beta}_j | \cdots | \boldsymbol{\beta}_m]$ $(\boldsymbol{\beta}_j \in \boldsymbol{R}^{m\times 1}, \boldsymbol{\beta}_j \neq \boldsymbol{0})$，执行分组过程和列法式化过程后问题为求解$\|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \bar{r}_{\min}$，其中$\boldsymbol{A} = \bigcup\limits_{s=1}^{q}\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{F}_s = [\boldsymbol{\alpha}_1 | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_j | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_m]$，$\alpha_j = 1/\|\boldsymbol{\beta}_j\|_2$，$\boldsymbol{F}_s = (f_{il})_{m_s\times m_s}$，$f_{il} = f_i = 1/\|\boldsymbol{\beta}_j\|_2$ (当$l = i$, $j = s + q(i-1)$)或$f_{il} = 0$ (当$l \neq i$))。由定义1和定义2得知，$\overline{\boldsymbol{Z}}$和$\overline{\boldsymbol{X}}$均存在，由列法式化过程有$\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{Z}_s = \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{F}_s^{-1}\boldsymbol{Z}_s = \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{X}_s$，即$\boldsymbol{Z}_s = \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{X}_s$和$\boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{F}_s$。所以$r_{\min} = \|\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{B}(\bigoplus\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\overline{\boldsymbol{Z}}_s) - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\bigoplus\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\boldsymbol{B}_s\overline{\boldsymbol{Z}}_s - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\bigoplus\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\boldsymbol{A}_s\overline{\boldsymbol{X}}_s - \boldsymbol{b}\|_2 \|\boldsymbol{A}(\bigoplus\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\overline{\boldsymbol{X}}_s) - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \bar{r}_{\min}$，即求解问题$\|\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{b}\|_2 = r_{\min}$与求解问题$\|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b}\|_2 = \bar{r}_{\min}$等价。

2) 令$\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}$，由定义1，$\overline{\boldsymbol{Y}}$存在且由$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$唯一确定，并且$\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$，即$(\boldsymbol{\alpha}_i, \overline{\boldsymbol{Y}}) = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b})$对每$s$和每$i$成立。再因分组过程和列法式化过程使$\boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{F}_s = [\boldsymbol{\alpha}_1 | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_i | \cdots | \boldsymbol{\alpha}_{m_s}]$为正交规范列向量组，从而在列处理法贪心过程中有：$\|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^{k+1}\|_2^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}_r^{k+1}\|_2^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{m_r}\|_2^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - (\overline{\boldsymbol{Y}}_0 + \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \overline{\boldsymbol{Y}}_0)\boldsymbol{\alpha}_i)\|_2^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - (\boldsymbol{Y}^k + \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)\boldsymbol{\alpha}_i)\|_2^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2 - 2(\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k, \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)\boldsymbol{\alpha}_i) + \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2, - \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2 - \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)^2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2 - d_r = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2 - d \leqslant \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2^2$，即$\|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^{k+1}\|_2 = \|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{Y}^{k+1} = \boldsymbol{Y}^k \Leftrightarrow d = 0$，序列$\{\|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2\}_{k=0,1,2,\cdots}$单调减小有下界，故$\lim\limits_{k\to+m}\|\overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Y}^k\|_2$存在，从而$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{Y}^k$存在。令$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{Y}^k = \boldsymbol{Y}^*$，则因$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{Y}^{k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{Y}^k = \boldsymbol{Y}^*$，所以$\lim\limits_{k\to+\infty}d = \lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\left\{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)^2\right\} = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\left\{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Y}^k)^2\right\} = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant q}\left\{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m_r}((\boldsymbol{\alpha}^i, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{Y}^*))^2\right\} = 0$，所以$(\boldsymbol{\alpha}^i, \boldsymbol{Y}^*) = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{b})$对每$s$和每$i$成立，即$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$成立。由定义1，

存在 $\boldsymbol{X}^* \in \boldsymbol{R}^{m\times 1}$ 使 $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{AX}^*$ 和 $\|\boldsymbol{AX}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = \bar{r}_{\min} = r_{\min} = \|\boldsymbol{BZ}^* - \boldsymbol{b}\|_2$ 及 $\left| \|\boldsymbol{AX}^k - \boldsymbol{b}\|_2 - r_{\min} \right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow d(k) \leqslant \varepsilon$。

证毕

假设算法在有q+1台处理机的消息传递分布式存储MIMD并行计算机上实现，p_0 为主机，$p_s(s = 1,2,\cdots q)$ 各处理机内存放有对应数据$[\boldsymbol{A}_s \mid \boldsymbol{b}]$。设算法模块3) 中(4)循环执行 $\bar{k}$ 次。

1) 处理机 $p_s(s = 1,2,\cdots q)$ 执行模块2)作实数乘、除法运算 $(2m+1)m_s$ 次，实数开方 m_s 次；执行模块3) 作实数乘法运算 $(2m+1)m_s\bar{k}$ 次；执行模块4) 作实数乘法 m_s 次。故处理机 p_s 的实数乘、除运算量为 $O(mm_s\bar{k})$，实数开方运算量为 $O(m_s)$。2) 须主机 p_0 发出的主要通信信息有：$r\,(r \in \{1,2,\cdots,q\},共\bar{k}-1次)$，$\boldsymbol{Y}^{k+1}(\boldsymbol{Y}^{k+1} \in \boldsymbol{R}^{m\times 1},共\bar{k}-1次)$。须处理机 p_s 发出的通信信息有：d_s (实数，各 $\bar{k}-1$ 次)，$\boldsymbol{Y}_r^{k+1}(r \in \{1,2,\cdots,q\}$，共 $\bar{k}$ 次，假定不发送全部 $\boldsymbol{Y}_s^{k+1}$)，$\boldsymbol{X}_s^*(\boldsymbol{X}_s^* \in \boldsymbol{R}^{m_s\times 1}$，各1次)。在以一个实数作通信单位时，算法通信量为 $O(m\bar{k})$。3) 因 p_s 中只 p_r 发送 $\boldsymbol{Y}_r^{k+1}$，故算法的同步开销为 $O(\bar{k})$。4) 因分组过程1) 能作到各处理机 $p_s(s = 1,2,\cdots q)$ 的负载平衡，故 P_{C-G} 算法有较为理想的加速比和并行效率。5) 模块2) 列法式化过程具有列标度化的作用和较好的数值稳定性，模块3) 列处理法贪心方法对任意的 $\boldsymbol{Y}^k \in \boldsymbol{R}^{n\times 1}$ 可求得理论上准确的第 $k+1$ 次贪心解 $\boldsymbol{X}^{k+1}(\boldsymbol{Y}^{k+1} = \boldsymbol{AX}^{k+1})$，亦有较好的数值稳定性。故算法有较好的数值稳定性。

3 算 例

设 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}] = (b_{tj})_{30\,000\times 90\,000}$，$\boldsymbol{A} = (a_{tj})_{30\,000\times 30\,000}$，$a_{tj} = 1$ (当 $|t-j| \leqslant 1$) 或 $a_{tj} = 0$ (当 $|t-i| \leqslant 1$)，$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{30\,000\times 1}$，$\boldsymbol{b} = (3,3,\cdots,3)^T$。取 $\boldsymbol{X}^0 = 0$ ($\boldsymbol{X}^0 \in \boldsymbol{R}^{90\,000\times 1}$)，$s = 1,2,\cdots,9$。改进 P_{C-G} 算法，求解 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$，解法如下：

1) 分组映射 $M(s,i) = j$ 设计：用定义2方法将 B 分成3组，再将每组均分为3组。例如第9组 $\bar{\boldsymbol{A}}_9\bar{\boldsymbol{X}}_9 = \bar{\boldsymbol{b}}$ 中 $\bar{\boldsymbol{A}}_9$ 由 $\boldsymbol{B}$ 中第60 003，60 006，60 009，⋯，90 000等共10 000列组成。

2) 设 $\boldsymbol{A}_s$ 采用列优先顺序压缩存储，每列存储3个元素。列法式化后 $A_s[1\cdot\cdot 10\,000]$ 及 $b[1\cdot\cdot 30\,000]$ 中内容示意为：

$\boldsymbol{A}_{1,4,7}: [(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),\cdots,(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})]$

$\boldsymbol{A}_{2,5,8}: [(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),\cdots,(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})]$

$\boldsymbol{A}_{3,6,9}: [(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),\cdots,(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})]$

$\boldsymbol{b}: (3,3,\cdots,3)$

3) 算法模块3) 中(4) 循环中数据如下

k=0: $d_{1,4,7} = 269\,991$，$d_{2,5,8} = 270\,000$，$d_{3,6,9} = 269\,991$，$\max\limits_{1\leqslant s\leqslant 9}\{d_s\} = \{d_2,d_5,d_8\}$，$r = \min\{2,5,8\} = 2$，$\boldsymbol{X}_r^{0+1} = \bar{\boldsymbol{X}}_2^1 = (3\sqrt{3},3\sqrt{3},\cdots,3\sqrt{3},)^T$，$\boldsymbol{X}_s^{0+1} = \boldsymbol{X}_s^1 = \boldsymbol{X}_s^0 = (0,0,\cdots,0)^T$ $(s \neq 2)$，$\boldsymbol{Y}^{0+1} = \boldsymbol{Y}^1 = \boldsymbol{Y}^2 = (3,3,\cdots,3)^T$。$k$=1：$d_{1,4,7}$= 0, $d_{2,5,8} = 0$, $d_{3,6,9} = 0$, $\max\limits_{1\leqslant s\leqslant 9}\{d_s\}$=0，结束。

4) 解向量计算过程示意如下($\boldsymbol{X}_s^* \in \boldsymbol{R}^{10\,000\times 1}$，$\boldsymbol{X}^* \in \boldsymbol{R}^{90\,000\times 1}$，$\boldsymbol{Y}^* \in \boldsymbol{R}^{30\,000\times 1}, s = 1,2,\cdots,9$)。

$$\boldsymbol{X}_2^* = \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}_2^1 = (3,3,\cdots,3)^T,\ \boldsymbol{X}_s^* = (0,0,\cdots,0)^T\ (s \neq 2),\ \boldsymbol{X}^* = \mathop{\oplus}_{1\leqslant s\leqslant 9} \boldsymbol{X}_s^* = (x_1,\cdots,x_j\cdots,x_{90\,000})^T$$

式中 x_j =3(当j=2, 5, 8, ⋯, 2 999)或者x_j =0(当j≠2, 5, 8, ⋯, 2 999) $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{BX}^* = \boldsymbol{Y}^1 = (3,3,\cdots,3)^T$ =$\boldsymbol{b}$。此方程组相容，$\|\boldsymbol{BX}^* - \boldsymbol{b}\|_2 = r_{\min} = 0$。检验可知 $\boldsymbol{X}^*$ 确为 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解。

参 考 文 献

[1] 杨本立, 曾宪雯, 李安志.线性代数方程组正交化列处理法[J]. 西南交通大学学报, 2003, 38(4): 445~449

[2] 杨本立. 超定方程组最小二乘解行处理法[J]. 云南师范大学学报, 1999, 17(1): 1-4

编 辑 刘文珍