具有时滞的Hopfield神经网络的周期解

朱培勇[1]，孙世新[2]

(1. 电子科技大学应用数学学院　成都　610054;　2. 电子科技大学计算机科学与工程学院　成都　610054)

【摘要】假设具有时滞的Hopfield神经网络的每个输出响应函数是满足Lipschitz条件的有界函数，当该网络的输入信号始终以正常数ω为周期，并且在网络参数满足一定的条件时，通过构造适当的Lyapunov泛函的方法，得到了该类网络必存在唯一的ω-周期解，并且其余各解都按指数收敛于该周期解的一些判据，通过实例对所得到的判据进行了直观性解释。

关　键　词　神经网络;　周期解;　指数收敛;　输出响应

中图分类号　TN911;　O175.1　　　文献标识码　A

A Periodic Solution of Hopfield Neural Network with Delays

ZHU Pei-yong[1]，SUN Shi-xin[2]

(1. School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054;

2. School of Computer Science and Engineering, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　Some sufficient criterias about the existence and uniqueness of a ω-periodic solution are obtained under the assumption of that each output response is bounded and satisfies Lipschitz condition for Hopfield neural network, when all input signals are continuously ω-periodic functions and the network parameters satisfy suitable conditions, by means of the method of a suitable Lyapunov functional. And it is proved that all other solutions converge exponentially to the above ω-periodic solution. An intuitive explain of the above new criteras is given in the final example.

Key words　neural network;　periodic solution;　converge exponentially;　output response

本文主要讨论如下Hopfield神经网络的周期解及其与其它各解之间的关系，即：

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}))+I_i(t) \qquad R_i>0\text{ ；} i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

式中　n是神经元的个数，设为常数；$u_i(t)$表示第i个神经元在t时刻的状态变量；$g_j(u_j(t))$表示第j个神经元在t时刻的输出响应；R_i表示第i个神经元的电阻值；T_{ij}表示第j个神经元对第i个神经元的影响强度；当i和j固定时，τ_{ij}是与时间t无关的非负实数；$I_i(t)$是第i个神经元在t时刻的输入偏值并记$\tau=\max\{\tau_{ij}:i,j=1,2,\cdots,n\}$。

假设C=$C([-t，0]，R^n)$表示$[-t，0]$到R^n的所有连续函数构成的函数空间。定义C上范数为$\|\phi\|_\tau=\sup\limits_{-\tau\le\theta\le 0}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(\theta)|^2}$，($\phi\in C$)且用$\|\cdot\|$表$R^n$中的Euclid范数，即$\|u\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$，当$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in R^n$时，式(1)的解假设都是满足下列初始条件的解，该初始条件为：

$$u_i(t,\phi)=\phi_i(t)\ge 0 \qquad -\tau\le t\le 0，i=1，2，\cdots，n \tag{2}$$

收稿日期：2003 – 10 – 03
作者简介：朱培勇(1956 –)，男，博士后，教授，主要从事拓扑学、神经网络及混沌行为的理论与应用方面的研究.

式中 每个$\phi_i \in C$。

文献[1]和[2]对式(1)的周期解问题进行了较深入的讨论，得到了如下结果。

定理 1[1] 设式(1)中输出函数$g_j(s)$，输入函数$I_i(t)$以及参数T_{ij}分别满足下列3个条件：1) 每个g_j在R上有连续一阶导数，并且对于$\forall s \in R$有$g'(s) > 0$；2) 每个I_i ：$R^+ \to R$都是以ω为周期的周期函数；3) 对于每个$j\,(1 \leq j \leq n)$，$T_{jj} < 0$，并且存在α_j使得$T_{jj} + \dfrac{1}{\alpha_j}\sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n} \alpha_i |T_{ij}| < 0$，则式(1)恰有一个以$\omega$为周期的周期解，并且其余所有解都按指数收敛于该周期解。

然而，在实际应用中，遇到的输出响应函数几乎是非完全光滑的函数(例如$g_j(s) = (|s+1| - |s-1|)/2$)。因此，一个自然的问题是，如果式(1)中输出响应g_j不是单调递增的光滑函数，当每个输入偏值是连续的周期信号时，式(1)的状态变量是否始终呈周期变化。本文就此问题进行讨论。

定义 1 函数$g(s)$称为在数集S是满足Lipschitz条件的，若有$k > 0$使得$|g(s_1) - g(s_2)| \leq k|s_1 - s_2|$，对于$\forall\ s_1, s_2 \in S$成立。其中$k$称为是$g(s)$的Lipschitz系数。

定义 2 设$u(t, \phi^*)$是式(1)的满足初始条件式(2)的1个特解，称式(1)的解$u(t,\phi)$是按指数收敛于$u(t, \phi^*)$的，如果存在常数$\alpha > 0$，$M \geq 1$，$t_0 \geq 0$使得$\forall\ t \geq t_0$，$\| u(t,\phi) - u(t,\phi^*) \| \leq \| \phi - \phi^* \|_\tau\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}$，式中$\phi \in C$。

1 主要结果及其证明

定理 2 设式(1)的每个输出响应g_i在实数集R有界，且在R上满足Lipschitz条件，若$\forall\ i(1 \leq i \leq n)$，$\sum\limits_{j=1}^{n}(k_i|T_{ij}| + k_j|T_{ji}|) < 2/R_i$，且$I_i$ ：$R^+ \to R$均是周期为ω的周期函数，则式(1)有唯一的以ω为周期的周期解，并且其余的任何解都按指数收敛于该周期解。其中，k_i是g_i的Lipschitz系数。

证明 设$u(t,\phi)$是式(1)的任一解。对于$\forall\ t \geq 0$，定义函数$u_t(\phi) = u(t+\theta, \phi)$，$\theta \in [-\tau, 0]$，则$u_t(\phi) \in C$。取式(1)的任意两个解$u(t,\phi) = (u_1(t,\phi), (u_2(t,\phi), \cdots, u_n(t,\phi))$与$u(t,\psi) = (u_1(t,\psi), (u_2(t,\psi), \cdots, u_n(t,\psi))$，由式(1)知，对于$\forall\ t \geq 0$，$\forall\ i\ (1 \leq i \leq n)$，有：

$$\frac{\mathrm{d}[u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi)]}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi)}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(g_j(u_j(t-\tau_{ij}, \phi)) - g_j(u_j(t-\tau_{ij}, \psi)) \tag{3}$$

取常数$\tau > 0$与$\varepsilon > 0$，使$\forall\ i\ (1 \leq i \leq n)$，$\sum\limits_{j=1}^{n}(k_i|T_{ij}| + k_j|T_{ji}|) < (\dfrac{2}{R_i} - \varepsilon)\mathrm{e}^{-\tau\varepsilon}$。$\forall t \in R^+$，作Lyapunov泛函有：

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big\{(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))^2 \mathrm{e}^{\varepsilon t} + \sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^{t} (u_j(s,\phi) - u_j(s,\psi))^2 \mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ij})} \mathrm{d}s\Big\}$$

则有：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = & \sum_{i=1}^{n}\Big\{(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))'\mathrm{e}^{\varepsilon t} + \frac{1}{2}\ \varepsilon\ (u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))^2\ \mathrm{e}^{\varepsilon t} + \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t,\phi) - u_j(t,\psi))^2 \mathrm{e}^{\varepsilon(t+\tau_{ij})} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t-\tau_{ij},\phi) - u_j(t-\tau_{ij},\psi))^2\ \mathrm{e}^{\varepsilon t}\Big\} = \\
& \mathrm{e}^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\Big\{(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))[-\frac{u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi)}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(g_j(u_j(t-\tau_{ij},\phi)) - g_j(u_j(t-\tau_{ij},\psi)))] + \\
& \frac{1}{2}\ \varepsilon\ (u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t,\phi) - u_j(t,\psi))^2 \mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{ij}} - \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t-\tau_{ij},\phi) - u_j(t-\tau_{ij},\psi))^2\Big\} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\Big\{(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{R_i})(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))^2 + \\
& \sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| \frac{(u_i(t,\phi) - u_i(t,\psi))^2 + (u_j(t-\tau_{ij},\phi) - u_j(t-\tau_{ij},\psi))^2}{2} + \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t,\phi) - u_j(t,\psi))^2\ \mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{ij}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j |T_{ij}| (u_j(t-\tau_{ij},\phi) - u_j(t-\tau_{ij},\psi))^2\Big\} \leq
\end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\left\{(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{R_i})+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\sum_{j=1}^{n}(k_j|T_{ij}|+k_i|T_{ji}|)\right\}(u_i(t,\phi)-u_i(t,\psi))^2=$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon(t+\tau)}}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{-(\frac{2}{R_i}-\varepsilon)\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}(k_j|T_{ij}|+k_i|T_{ji}|)\right\}(u_i(t,\phi)-u_i(t,\psi))^2\leq 0$$

从而，$V(t)$是区间$[0,+\infty)$的单调递减函数。所以当$t\geq 0$时，有$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i(t,\phi)-u_i(t,\psi)\right)^2\mathrm{e}^{\varepsilon t}\leq V(t)\leq V(0)$。又因为当$t\in[-\tau,0]$时，有$u_i(t,\phi)=\phi_i(t)$，因此有：

$$V(0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{(u_i(0,\phi)-u_i(0,\psi))^2+\sum_{j=1}^{n}k_j|T_{ij}|\int_{-\tau_{ij}}^{0}(u_j(s,\phi)-u_j(s,\psi))^2\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ij})}\mathrm{d}s\right\}\leq$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{(\phi_i(0)-\psi_i(0))^2+\max_{1\leq j\leq n}(k_j|T_{ij}|)\int_{-\tau}^{0}\sum_{j=1}^{n}(u_j(s,\phi)-u_j(s,\psi))^2\mathrm{e}^{s+\tau}\mathrm{d}s\}\leq$$

$$\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{i=1}^{n}\max_{1\leq j\leq n}(k_j|T_{ij}|)\ (\mathrm{e}^{\tau}-1)\right\}\|\phi-\psi\|_{\tau}^{2}$$

取常数$N=1+\sum_{i=1}^{n}\max_{1\leq j\leq n}(k_j|T_{ij}|)\ (\mathrm{e}^{\tau}-1)$，则$\forall\, t\geq 0$，有：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i(t,\phi)-u_i(t,\psi)\right)^2\leq N\|\phi-\psi\|_{\tau}^{2}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\tag{4}$$

又因为$N>1$，由初始条件式(2)知，当$t\in[-\tau,0]$时，式(4)也成立。所以，对于$\forall\, t\geq 0$，$\forall\ \theta\in[-\tau,0]$，有$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i(t+\theta,\phi)-u_i(t+\theta,\psi)\right)^2\leq N\|\phi-\psi\|_{\tau}^{2}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}$，则$\|u_t(\phi)-u_t(\psi)\|_{\tau}\leq\sqrt{N}\|\phi-\psi\|_{\tau}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)/2}$。从而，有$\|u_{\omega}(\phi)-u_{\omega}(\psi)\|_{\tau}\leq\sqrt{N}\|\phi-\psi\|_{\tau}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(\omega-\tau)/2}$。取充分大的$k$使得常数$r=\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\varepsilon(k\omega-\tau)/2}<1$，并且，定义映射$p:C\to C$合于$p(\phi)=u_{\omega}(\phi)$ $p^2(\phi)=u_{\omega}(u_{\omega}(\phi))=u_{2\omega}(\phi)$，…，$p^k(\phi)=\underbrace{u_{\omega}\cdots(u_{\omega}}_{k个}(\phi))=u_{k\omega}(\phi)$，因此有：

$$\|p^k(\phi)-p^k(\psi)\|_{\tau}=\|u_{k\omega}(\phi)-u_{k\omega}(\psi)\|_{\tau}\leq\sqrt{N}\mathrm{e}^{-\varepsilon(k\omega-\tau)/2}\|\phi-\psi\|_{\tau}=r\|\phi-\psi\|_{\tau}$$

故p^k是C到自身的一个压缩映射。由Brouwer压缩映射定理，有唯一的$\phi^*\in C$使得$p^k(\phi^*)=\phi^*$。又因为$p^k(p(\phi^*))=p(p^k(\phi^*))=p(\phi^*)$，则$p(\phi^*)=\phi^*$，即$u_{\omega}(\phi^*)=\phi^*$。对于上述$\phi^*\in C$，设$u(t,\phi^*)$是式(1)的解。因为每个$i$有$I_i(\omega+t)=I_i(t)$，所以$u(t+\omega,\phi^*)$是式(1)的解。又因$\forall\theta\in[-\tau,0]$，$\forall t\geq 0$，有：

$$u(t+\omega+\theta,\ \phi^*)=u_{t+\omega}(\phi^*)=u_t(u_{\omega}\ (\phi^*))=u_t(\phi^*)=u(t+\theta,\ \phi^*)$$

从而有$u(t+\omega,\phi^*)=u(t,\phi^*)$，即$u(t,\phi^*)$是式(1)的以$\omega$为周期的周期解。

如果$u(t,\psi^*)$是式(1)的以ω为周期的又一个周期解，即$\forall\ \theta\in[-\tau,0]$，有$u(\theta+\omega,\psi^*)=u(\theta,\psi^*)=\psi^*(\theta)$，则$p(\psi^*)=u_{\omega}(\psi^*)=\psi^*$。根据不动点的唯一性，有$\psi^*=\phi^*$，即周期解的唯一性得证。

对于式(1)的任一个解$u(t,\psi)$，由式(4)知，当$t\geq 0$时，有$\|u(t,\psi)-u(t,\phi^*)\|^2=\sum_{i=1}^{n}(u_i(t,\psi)-u_i(t,\phi^*))^2\leq$ $\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}\sum_{i=1}^{n}(u_i(t+\theta,\ \psi)-u_i(t+\theta,\ \phi^*))^2=\|u_t(\psi)-u_t(\phi^*)\|_{\tau}^{2}\leq N\|\psi-\phi\|_{\tau}^{2}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}$，故有常数$M=\sqrt{N}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\varepsilon\tau}\geq 0$与常数$\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon>0$，使得$\|u(t,\psi)-u(t,\phi^*)\|\leq M\|\psi-\phi\|_{\tau}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}$，即$u(t,\psi)$按指数收敛于$u(t,\phi^*)$。

根据定理2，下面两个推论平凡地成立。

推论 1　设式(1)的每个输出响应为$g_i(s)=(|s+1|-|s-1|)/2$。如果$\forall i\ (1\leq i\leq n)$，$\sum_{j=1}^{n}(|T_{ij}|+|T_{ji}|)<2/R_i$，并且每个$I_i:R^{+}\to R$都是周期为$\omega$的周期函数，则式(1)有唯一的以$\omega$为周期的解并且其他的解都指数收敛于该$\omega$-周期解。

推论 2　设$(\boldsymbol{T}_{ij})_{n\times n}$是$n$阶实对称矩阵，并且对于每个$i\ (1\leq i\leq n)$，有$\sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{T}_{ij}|<1/R_i$，如果式(1)中每个输出响应$g_i$满足Lipschitz条件，并且每个$I_i(t)$均是以$\omega$为周期的周期函数，则式(1)有唯一的以$\omega$为周期的解，并且每个解都按指数收敛于该解。

2 实　例

为了加深对定理2和推论2中解结构的直观性理解，展示如下例子。

例子　考虑如下Hopfield网络

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1(u_1(t-\tau_1)) \\ g_2(u_2(t-\tau_2)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cos t \\ 6\sin t \end{bmatrix} \tag{5}$$

容易验证，若g_1与g_2是R上的有界函数且满足Lipschitz条件，则由上述推论，式(5)有唯一的周期为2π的周期解，并且每个解$u(t,\phi)$都指数收敛于该周期解。

特别地，取$g_1(u) \equiv g_2(u) \equiv 1$，则式(5)有通解：

$$\begin{cases} u_1(t) = \dfrac{3}{5}\cos t + \dfrac{6}{5}\sin t + \dfrac{1}{2} + A\mathrm{e}^{-2t} \\ u_2(t) = -\dfrac{3}{5}\cos t + \dfrac{9}{5}\sin t + \dfrac{1}{3} + B\mathrm{e}^{-3t} \end{cases} \tag{6}$$

式中　A，B是任意的二常数，因而有：

$$\begin{cases} u_1^*(t) = \dfrac{3}{5}\cos t + \dfrac{6}{5}\sin t + \dfrac{1}{2} \\ u_2^*(t) = -\dfrac{3}{5}\cos t + \dfrac{9}{5}\sin t + \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{7}$$

是式(5)的周期为2π的唯一周期解，并且对于通解式(6)中的任何解$u(t) = (u_1(t)$，$u_2(t))$，有：

$$\| u(t) - u^*(t) \| = \sqrt{[A\mathrm{e}^{-2t}]^2 + [B\mathrm{e}^{-3t}]^2} \le M\,\mathrm{e}^{-2t}$$

式中　$M = \sqrt{A^2 + B^2}$ 。

3 结 束 语

一般在讨论连续性Hopfield神经网络时都假设输出响应函数是光滑并且严格递增的。但是，在实际工程应用和理论研究中遇到的却常常是非光滑的函数。因此，本文就连续型Hopfield网络的输出响应函数是非光滑的情况，对具有时滞的连续型Hopfield神经网络的周期解问题进行讨论。通过构造适当的Lyapunov泛函，得到了每个输入信号$I_i(t)$都以正常数ω为周期时，该类神经网络存在唯一的ω-周期解，并且其余各解都按指数收敛于该周期解的3个判据，本文还以实际例子对所得到的其中两个判据进行了直观性解释。

参 考 文 献

[1] Zhang Yi. Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks[J]. Int.J. Syst. Sci., 1996, 27(2): 227-231

[2] Zhang Yi, Zhong Shou-ming. Periodic solutions and global stability of delay Hopfield neural networks[J]. Int.J.Syst.Sci, 1996, 27(9): 895-901

[3] Cao Jinde. Global exponential stabolity and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. J. Computer and Systems Sciences, 2000, 60: 38-46

[4] 廖晓昕. 论Hopfield神经网络中物理参数的数学内蕴[J]. 中国科学(E辑), 2003, 33(2): 127-136

[5] 曹进德. 时延细胞神经网络的指数稳定性和周期解[J]. 中国科学(E辑), 2000, 30(6): 541-549

编　辑　熊思亮