# Banach空间中Fuzzy多值隐拟变分包含

杨 莉

(西南科技大学理学院 四川 绵阳 621002)

【摘要】在Banach空间中并在不具紧性的条件下，引入和研究了一类fuzzy多值隐拟变分包含及相应的fuzzy隐预解算子方程，借助预解算子技巧，建立了Banach空间中fuzzy多值隐拟变分包含与预解算子方程的等价性，得到了该类fuzzy多值隐拟变分包含的迭代算法与某些解的存在性定理及解的迭代逼近。

**关 键 词** fuzzy多值隐拟变分包含； fuzzy映象； $m$-增生映象； 预解算子； 迭代算法

**中图分类号** O177.91　　**文献标识码** A

# Fuzzy Multi-Valued Implicit Quasi-Variational Inclusions in Banach Spaces

YANG Li

(Department of Mathematics Southwest University of Science and Technology Sichuan Mianyang 621002)

**Abstract** A class of fuzzy multi-valued implicit quasi-variational inclusions without the compactness condition and the corresponding fuzzy implicit resolvent operator equation in Banach space are introduced and studied. By using the resolvent operator technique, the equivalence between the fuzzy multi-valued implicit quasi-variational inclusions and the fuzzy resolvent operator equation in Banach space are established. A iterative algorithms、the existence theorem of solutions and iterative approximation for solving the fuzzy multi-valued implicit quasi-variational inclusions in Banach space are obtained.

**Key words** fuzzy multi-valued implicit quasi-variational inclusion; fuzzy mapping; $m$-accretive mapping; resolvent operator; iterative algorithm

## 1 问题的提出

假设 $E$ 是一实Banach空间， $E^*$ 是 $E$ 的拓扑对偶空间， $CB(E)$ 是 $E$ 的一切非空有界闭子集族， $D(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(E)$ 上的Hausdorff度量， $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 $E$ 与 $E^*$ 间的对偶对，而 $J: E \to 2^{E^*}$ 表示正规对偶映象， $E$ 上的fuzzy集的全体记为 $\Im(E)$。闭fuzzy映象 $A: E \to \Im(E)$ 称为满足条件$(*)$：如果存在函数 $a: E \to [0,1]$，使得 $\forall x \in E$，集 $(A_x)_{a(x)} = \{y \in E : A_x(y) \geq a(x)\}$ 是 $E$ 的非空有界集。

设 $E$ 是一实Banach空间， $T, V, Z: E \to \Im(E)$ 是三个闭fuzzy映象且分别关于 $a, b, c: E \to [0,1]$ 满足条件$(*)$, $f, g: E \to E$ 是两个单值的满映象，设 $A: E \times E \to 2^E$ 是一集值映象且关于第一变量是$m$-增生的，对给定的非线性映象 $N(\cdot,\cdot): E \times E \to E$，现考虑问题：求 $u \in E$，使得：

$$\begin{cases} T_u(w) \quad a(u), \geq V_u(y) \geq b(u), \quad Z_u(z) \geq c(u) \\ J \in N(w,y) + A((f(u)-g(u), z) \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2004－09－09

作者简介：杨 莉(1962－)，女，硕士，副教授，主要从事应用非线性分析方面的研究.

式中 称Banach空间中fuzzy多值隐拟变分包含。适当选择映象$T,V,Z,A,f,g,N$及空间$E$，由式(1)可以得到许多已知的及一些新型的变分不等式，变分包含及相应的最优化问题。

现在考察与fuzzy多值隐拟变分包含式(1)相关的预解算子方程，为此先给出某些概念和符号。

**定义 1** $T,V:E\to\Im(E)$是两个闭fuzzy映象且分别关于$a,b:E\to[0,1]$满足条件(*)，$N(\cdot,\cdot):E\times E\to E$是一非线性映象。1) 映象$x\mapsto N(x,y)$称为关于fuzzy映象$T$是$a-Lipschitz$连续的，如果对任意的$x_1,x_2\in E, w_1\in(T_{x_1})_{a(x_1)}, w_2\in(T_{x_2})_{a(x_2)}$，$\|N(w_1,y)-N(w_2,y)\|\le a\|x_1-x_2\|$，$y\in E$，其中$a>0$是一常数；2) 映象$y\mapsto N(x,y)$称为关于fuzzy映象$V$是$b-Lipschitz$连续的，如果对任意的$u_1,u_2\in E$，$y_1\in(V_{u_1})_{b(u_1)}, y_2\in(V_{u_2})_{b(u_2)}$，$\|N(x,y_1)-N(x,y_2)\|\le b\|y_1-y_2\|$，$x\in E$，其中$b>0$是一常数。

**定义 2** 设$Z:E\to\Im(E)$是一闭fuzzy映象且分别关于$c:E\to[0,1]$满足条件(*)，$D(\cdot,\cdot)$是$CB(E)$上的Hausdorff度量，$Z$称为$h$ - $Lipschitz$连续的，如果对任意的$x,y\in E$，$D((Z_x)_{a(x)},(Z_y)_{a(y)})\le h\|x-y\|$，其中$h>0$是一常数。与Banach空间中fuzzy多值隐拟变分包含式(1)相关的，本文考虑下面的问题：求$u$，$x\in E$，使得

$$\begin{cases} T_u(w)\ge a(u), \quad V_u(y)\ge b(u), \quad Z_u(z)\ge c(u) \\ N(w,y)+r^{-1}F_{A(\cdot,z)}(x)=0 \end{cases} \tag{2}$$

式中 $r>0$是一常数；$F_{A(\cdot,z)}=I-J_{A(\cdot,z)}$，其中$I$是恒等映象，$J_{A(\cdot,z)}$是$A(\cdot,z)$的预解算子。式(2)型的方程称为Banach空间中的fuzzy隐预解算子方程。

**引理 1**[1] 设$E$是一实Banach空间，$J:E\to 2^{E^*}$是正规对偶映象，则对任意的$x_1,x_2\in E$ $\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle$，$\forall j(x+y)\in J(x+y)$。

**引理 2** 下面的结论等价：1) $(u,w,y,z)$，其中$u\in E$，$T_u(w)\ge a(u)$，$V_u(y)\ge b(u)$，$Z_u(z)\ge c(u)$是fuzzy多值隐拟变分包含式(1)的解；2) $(u,w,y,z)$，其中$u\in E$，$T_u(w)\ge a(u)$，$V_u(y)\ge b(u)$，$Z_u(z)\ge c(u)$是下面方程的解：

$$f(u)-g(u)=J_{A(\cdot,z)}(f(u)-g(u)-rN(w,y)) \tag{3}$$

3) $(x, u, w, y, z)$，其中$x$，$u\in E$，$T_u(w)$s$\ge a(u)$，$V_u(y)\ge b(u)$，$Z_u(z)\ge c(u)$是fuzzy预解算子方程式(2)的解：

$$\begin{cases} x=f(u)-g(u)-rN(w,y) \\ f(u)-g(u)=J_{A(\cdot,z)}(x) \end{cases} \tag{4}$$

为了求解fuzzy多值隐拟变分包含式(1)，借助引理2和Nadler定理提出下面的算法[2]。

算法对任给的$x_0,u_0\in E, w_0\in(T_{u_0})_{a(u_0)}$，$y_0\in(V_{u_0})_{b(u_0)}$，$z_0\in(Z_{u_0})_{c(u_0)}$，可得迭代序列$\{x_n\}$，$(u_n)$，$\{w_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$使得：

$$w_n\in(T_{u_n})_{a(u_n)}, \quad \|w_n-w_{n+1}\|\le(1+\frac{1}{n+1})D((T_{u_n})_{a(u_n)},(T_{u_{n+1}})_{a(u_{n+1})}) \tag{5}$$

$$y_n\in(V_{u_n})_{b(u_n)}, \quad \|y_n-y_{n+1}\|\le(1+\frac{1}{n+1})D((V_{u_n})_{b(u_n)},(V_{u_{n+1}})_{b(u_{n+1})}) \tag{6}$$

$$z_n\in(Z_{u_n})_{c(u_n)}, \quad \|z_n-z_{n+1}\|\le(1+\frac{1}{n+1})D((Z_{u_n})_{c(u_n)},(Z_{u_{n+1}})_{c(u_{n+1})}) \tag{7}$$

$$x_{n+1}=f(u_n)-g(u_n)-rN(w_n,y_n) \tag{8}$$

$$f(u_{n+1})-g(u_{n+1})=J_{A(\cdot,z_n)}(x_{n+1}) \tag{9}$$

对所有的$n\ge 0$。

## 2 主要结果

**定理** 设$E$是一实Banach空间，$T,V,Z:E\to\Im(E)$是三个闭fuzzy映象且分别关于$a,b,c:E\to[0,1]$满足条件(*)，$f,g:E\to E$是两个单值的满映象，$A:E\times E\to 2^E$关于第一变量是一$m$-增生映象，$N(\cdot,\cdot):E\times E\to E$是非线性单值的连续映象且满足下列条件：1) $f,g$分别是$g,d$ - $Lipschitz$连续的且$f-g$是$k$ - 强增生的，其中$0<k<1$；2) $T,V,Z:E\to\Im(E)$分别是$m,x,h$ - $Lipschitz$连续的fuzzy映象；3) 对任意给定的$y\in E$，映象

$x \mapsto N(x,y)$ 关于fuzzy映象 $T$ 是 $a$ - *Lipschitz* 连续的；4) 对任意给定的 $x \in E$，映象 $y \mapsto N(x,y)$ 关于fuzzy映象 $V$ 是 $b$ - *Lipschitz* 连续的；其中所有的 $g$，$d$，$m$，$x$，$h$，$a$，$b$ 都是正常数。如果下列条件满足：5) $\|J_{A(\cdot,x)}(z) - J_{A(\cdot,y)}(z)\| \le s\|x-y\|$，$\forall x,y,z \in E,\quad s>0$；6) $0 < 2(g+d)^2 + s^2h^2 + 4r^2(a^2+b^2) - \frac{3}{2} < k$，则存在 $x,\ u \in E,\quad w \in (T_u)_{a(u)},\quad y \in (V_u)_{b(u)},\quad z \in (Z_u)_{c(u)}$ 满足算子方程式(3)，从而 $(u,\ w,\ y,\ z)$ 是fuzzy多值隐拟变分包含式(1)的解且由算法所定义的序列 $\{x_n\},\ \{u_n\},\ \{w_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\}$ 分别强收敛于 $x,\ u,\ w,\ y,\ z$。

**证明**　由引理1及条件1)，对任意的 $j(u_{n+1}-u_n) \in J(u_{n+1}-u_n)$ 有：

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2 \le \frac{1}{3+2k}\|(f-g)(u_{n+1})-(f-g)(u_n)\|^2 \tag{10}$$

由条件1)、2)、3)、4)、5)及不等式 $\forall x,\ y \in E,\quad \|x+y\|^2 \le 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ 有：

$$\|(f-g)(u_{n+1})-(f-g)(u_n)\|^2 \le 2[2(g+d)^2 + 4r^2(a^2+b^2) + s^2(1+\frac{1}{n})^2h^2]\|u_n-u_{n-1}\|^2 \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)中得：

$$\|u_{n+1}-u_n\| \le t_n\|u_n-u_{n-1}\| \tag{12}$$

式中

$$t_n = \sqrt{\frac{2}{3+2k}[2(g+d)^2 + 4r^2(a^2+b^2) + s^2(1+\frac{1}{n})^2h^2]}$$

令

$$t = \sqrt{\frac{2}{3+2k}[2(g+d)^2 + 4r^2(a^2+b^2) + s^2h^2]}$$

显然 $t_n \to t\quad (n\to\infty)$，由条件6)可知 $0<t<1$，故当 $n$ 充分大时就有 $0<t_n<1$，于是由式(12)知 $\{u_n\}$ 是一Cauchy列，由条件2)及式(5)～式(7)知 $\{w_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\}$ 也是Cauchy列，设 $u_n \to u, w_n \to w$，$y_n \to y$，$z_n \to z\quad (n\to\infty)$，再由式(8)，(9)和条件5)及 $f,\ g,\ J,\ N$ 的连续性，让 $n\to\infty$ 即得 $f(u)-g(u) = J_{A(\cdot,z)}(f(u)-g(u)-rN(w,y))$。

最后证明 $w \in (T_u)_{a(u)},\quad y \in (V_u)_{b(u)},\quad z \in (Z_u)_{c(u)}$，事实上，因 $w_n \in (T_{u_n})_{a(u_n)}$，故有：$d(w,\ (T_u)_{a(u)}) \le \|w-w_n\| + d(w_n,\ (T_{u_n})_{a(u_n)}) + D((T_{u_n})_{a(u_n)},\ (T_u)_{a(u)}) \le \|w-w_n\| + m\|u_n-u\| \to 0\quad (n\to\infty)$。

因此 $d(w,\ (T_u)_{a(u)}) = 0$，故 $w \in (T_u)_{a(u)}$；类似可证 $y \in (V_u)_{b(u)}$，$z \in (Z_u)_{c(u)}$。证明表明：$(u,\ w,\ y,\ z)$ 是式(3)的解，由引理2得知 $(u,\ w,\ y,\ z)$ 是fuzzy多值隐拟变分包含式(1)的解且由算法所定义的迭代序列 $\{x_n\},\ \{u_n\},\ \{w_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\}$ 分别强收敛于 $x,\ u,\ w,\ y,\ z$。　　证毕

## 参　考　文　献

[1] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, 30: 4 197-4 208

[2] Nadler S B. Multi-valued contraction mappings[J]. Pacific J Math, 1969, 30: 475-488

编　辑　刘文珍