第 34 卷 第 5 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.34 No.5
2005 年 10 月 Journal of UEST of China Oct. 2005

正则化长波方程的显式精确解

陈翰林[1]，尚亚东[2]，刘希强[3]

(1. 西南科技大学理学院 四川 绵阳 621002; 2. 广州大学数学系 广州 650091; 3. 聊城大学数学系 山东 聊城 252059)

【摘要】利用推广的齐次平衡法，给出了正则化长波方程的一种Backlund变换。从方程的平凡解出发通过两种方式得到了RLW方程的一些显式精确解，诸如孤波解、周期解、有理分式解，以及椭圆函数解。

关 键 词 正则化长波方程; 齐次平衡法; Backlund变换; 精确解

中图分类号 O175.29 文献标识码 A

Explicit Solutions of Regularized Long Wave Equation

CHEN Han-lin[1]，SHANG Ya-dong[2]，LIU Xi-qiang[3]

(1. School of Science, Southwest University of Science and Technology Sichuan Mianyang 621000;

2. Math. Department of Guangzhou University Guangzhou 510640;

3. Math. Department of Liaocheng University Shandong Liaocheng 252059)

Abstract Based on the extended homogenous balance method, we get a Backlund transformation to the regularized long wave (RLW) equation. By applying our Backlund transformation and a given trivial solution, we find some explicit solutions of the RLW equation, such as solitary wave, periodic, rational and elliptic function solutions.

Key words regularized long wave equation; homogenous balance method; explicit(exact) solution; backlund transformation

在非线性色散的长波研究中，文献[1]提出并讨论了描述流体中长波单向传播的模型为：

$$u_t + \alpha\ u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

式中 $u(x,t)$ 表示波幅，变量 x 和 t 分别表示空间坐标和时间坐标，该式为正则化长波(RLW)或(BBM)方程。式(1)被认为是KdV方程的更合适的替代模型。文献[2-3]分别研究了RLW方程的双线性变换和逆散射变换，表明RLW方程只有一个 sech^2 孤波解，而没有N-孤波解($N \geq 2$)，且与一个条件方程有关。文献[4]解析地研究了RLW方程的孤立波解及其相互作用，表明2-孤立波互相作用的近似解具有孤立子性质。文献[5]数值模拟了RLW方程孤立波的相互作用，表明其2-孤立波相互作用是非弹性的。文献[6]在小扰动方法和Jacobi椭圆函数展开法的基础上，应用Lame方程和Lame函数求得了RLW方程的多级准确解。

本文用推广的齐次平衡法给出了RLW方程的一种Backlund变换，其满足几个复杂的条件方程。从方程的平凡解出发通过两种方式得到了RLW方程的一些显式精确解。

1 RLW方程的Backlund变换

式(1)具有如下形式的解：

收稿日期：2004 – 05 – 21

作者简介：陈翰林(1965 –)，男，博士，副教授，主要从事无穷维动力系统方面的研究.

$$u(x,t)=\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial x\partial t}+a=f''(\varphi)\varphi_x\varphi_t+f'(\varphi)\varphi_{xt}+a \tag{2}$$

式中 f,φ 为待定函数；a 为任意常数($u=a$ 是方程式(1)的平凡解)。由式(2)得知 $u_t=\left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial t^2}\right)_x$，代入式(1)对 x 积分一次可得：

$$\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial t^2}+\alpha u+\frac{1}{2}u^2-u_{xt}=A \tag{3}$$

式中 A 为积分常数。将式(2)确定的u代入式(3)通过整理后，可得：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}(f'')^2-f^{(4)}\right]\varphi_x^2\varphi_t^2+\left[-4\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-\varphi_t^2\varphi_{xx}-\varphi_x^2\varphi_{tt}\right]f'''+\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}f'f''+\\&[\varphi_t^2+(\alpha+a)\varphi_x\varphi_t-2\varphi_x\varphi_{xtt}-\varphi_{xx}\varphi_{tt}-2\varphi_{xt}^2-2\varphi_t\varphi_{xxt}]f''+\frac{1}{2}\varphi_{xt}^2(f')^2+\\&\left[\varphi_{tt}+(\alpha+a)\varphi_{xt}-\varphi_{xxtt}\right]f'+(\alpha a+\frac{1}{2}a^2-A)=0\end{aligned} \tag{4}$$

式中 $f=p\ln\varphi$，则利用$1/2(f'')^2-f^{(4)}$=0，可得 $p=-12$，且：

$$f=-12\ln\varphi,\quad (f'')^2=2f^{(4)},\quad f''f'=6f''',\quad (f')^2=12f'' \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)并利用$(f'')^2-2f^{(4)}$=0可得：

$$\begin{aligned}&[2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-\varphi_t^2\varphi_{xx}-\varphi_x^2\varphi_{tt}]f'''+[\varphi_t^2+(\alpha+a)\varphi_x\varphi_t-2\varphi_x\varphi_{xtt}-\varphi_{xx}\varphi_{tt}+\\&4\varphi_{xt}^2-2\varphi_t\varphi_{xxt}]f''+[\varphi_{tt}+(\alpha+a)\varphi_{xt}-\varphi_{xxtt}]f'+(\alpha a+\frac{1}{2}a^2-A)=0\end{aligned} \tag{6}$$

再令 f''',f'',f' 前的系数为零并取积分常数 $A=\alpha a+a^2/2$，得到关于 φ 的一组方程式为：

$$2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-\varphi_t^2\varphi_{xx}-\varphi_x^2\varphi_{tt}=0 \tag{7}$$

$$\varphi_t^2+(\alpha+a)\varphi_x\varphi_t-2\varphi_x\varphi_{xtt}-\varphi_{xx}\varphi_{tt}+4\varphi_{xt}^2-2\varphi_t\varphi_{xxt}=0 \tag{8}$$

$$\varphi_{tt}+(\alpha+a)\varphi_{xt}-\varphi_{xxtt}=0 \tag{9}$$

将 $f=-12\ln\varphi$ 代入式(2)得知，RLW方程有Backlund变换为：

$$u(x,t)=-12(\ln\varphi)_{xt}+a \tag{10}$$

式中 φ 满足式(7)～式(9)。

2 RLW方程的显式精确解

若式(7)～式(9)有解 $\varphi(x,t)=kx+\omega t+\xi_0$，则常数$k$，$\omega$ 满足条件：$\omega=-(\alpha+a)k$ 于是代入 $\varphi(x,t)=kx+\omega t+\xi_0$ 到式(10)中，得到RLW方程的有理分式孤波解：

$$u(x,t)=a-12(a+\alpha)/[x-(a+\alpha)t+\xi_1]^2 \tag{11}$$

式中 a，ξ_1 为自由参数。若式(7)～式(9)有如下形式的解：

$$\varphi(x,t)=1+\exp(kx+\omega t+\xi_0) \tag{12}$$

代式(12)到式(7)～式(9)，则常数 k,ω 满足条件：$\omega=(\alpha+a)k/k^2-1$，其中k为任意常数($k^2\neq 0,1$)。把式(12)代入式(10)，得到RLW方程的钟状孤波解：

$$u(x,t)=a-3(a+\alpha)\frac{k^2}{k^2-1}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}k\left(x+\frac{(a+\alpha)}{k^2-1}t+\xi_1\right)\right] \tag{13}$$

式中 a,ξ_1 为自由参数，$k^2\neq 0,1$。在 $a=0,\alpha=1$ 时，式(13)正是文献[4]得到的一族孤波解。在式(13)中让 $a=0,\ A_1=3\alpha\, k^2/1-k^2$，则有：

$$u(x,t)=A_1\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_1}{A_1+3\alpha}}\left(x-\frac{A_1+3\alpha}{3}t+\xi_1\right)\right] \tag{14}$$

式(14)与文献[2-3]中用双线性变换方法和逆散射方法得到的解一致。从式(11)和式(14)可以看出RLW方程式

(1)容许有恒定振幅的非传播孤立波存在，这是KdV方程不曾有的现象。由式(14)，利用双曲正切函数 tanh 和双曲余切函数coth求导时类似的性质，可得到RLW方程还有 csch^2 奇异行波解。

如果再利用关系式：$\mathrm{sech}(i\xi)=\sec\xi,\quad \mathrm{csch}(i\xi)=-i\csc\xi$，可得到RLW方程式(1)的两种三角函数状周期波解：

$$u(x,t)=a-3(a+\alpha)\frac{k^2}{k^2+1}\sec^2\left[\frac{1}{2}k\left(x-\frac{(a+\alpha)}{k^2-1}t+\xi_1\right)\right] \tag{15}$$

$$u(x,t)=a+3(a+\alpha)\frac{k^2}{k^2+1}\csc^2\left[\frac{1}{2}k\left(x-\frac{(a+\alpha)}{k^2-1}t+\xi_1\right)\right] \tag{16}$$

3　RLW方程的椭圆函数解

现就式(4)采用文献[7]中提出的方法求解。先取 $\varphi(x,t)=px+qt\ (pq\neq0)$，式(4)可化为：

$$q^2f''+(\alpha+a)pqf''+\frac{1}{2}p^2q^2(f'')^2-p^2q^2f^{(4)}+\alpha\ a+\frac{1}{2}a^2-A=0 \tag{17}$$

式中　$w=f''$，式(17)化为 $\frac{1}{2}(pq)^2w^2+(q^2+\alpha\ pq+apq)w+(\alpha\ a+\frac{1}{2}a^2-A)=(pq)^2w''$。此式两端同乘以 w' 并关于 φ 积分一次可得：

$$\frac{1}{6}(pq)^2w^3+\frac{1}{2}(q^2+\alpha\ pq+apq)w^2+(\alpha\ a+\frac{1}{2}a^2-A)w+B=\frac{1}{2}(pq)^2(w')^2 \tag{18}$$

式中　B为积分常数。进一步可将式(18)化为椭圆方程：

$$(w')^2=a_1w^3+b_1w^2+c_1w+d \tag{19}$$

式中　$a_1=\frac{1}{3},\ b_1=\frac{q+\alpha\ p+ap}{p^2q},\ c_1=\frac{2\alpha\ a+a^2-2A}{p^2q^2},\ d=\frac{2B}{p^2q^2}$ 为任意常数。记 $c_1=\frac{1}{3}(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)$，$d=-\frac{1}{3}y_1y_2y_3$，$b_1=-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$，则式(19)化为 $(w')^2=\frac{1}{3}(w-y_1)(w-y_2)(w-y_3)$，其中，$y_1\geq y_2\geq y_3$ 且为方程 $a_1w^3+b_1w^2+c_1w+d=0$ 的三个实根。由文献[8]可知，方程式(19)有解：

$$w=y_3+(y_2-y_3)\,\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{1}{12}(y_1-y_3)}\varphi,\ k\right]=y_2-(y_2-y_3)\ \mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{1}{12}(y_1-y_3)}\varphi,\ k\right] \tag{20}$$

式中　$k=\sqrt{\frac{y_2-y_3}{y_1-y_3}}$ 是椭圆函数sn和cn的模数。得到方程式(1)的椭圆函数周期解：

$$u(x,t)=a+pqy_3+pq(y_2-y_3)\ \mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{1}{12}(y_1-y_3)}\varphi,\ k\right] \tag{21}$$

下面讨论几种特殊情况的解：

1) 当 $y_1=y_2$ 时，$k=1$，只要 $q^2+\alpha^2p^2+2\alpha\ pq+2apq+2Ap^2>0$，则解式(20)可化为：

$$w=-b_1+\sqrt{b_1^2-c_1}-3\sqrt{b_1^2-c_1}\ \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt[4]{b_1^2-c_1})\varphi\right] \tag{22}$$

进而可得到RLW方程式(1)的钟状孤波解。

2) 若取积分常数 $A=\alpha a+\frac{1}{2}a^2, B=0$，则式(19)化为 $(w')^2=a_1w^3+b_1w^2$。对式(22)积分得到：

$$w=\begin{cases}-3b_1\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{b_1}(\varphi-\varphi_0\right] & (b_1=\frac{q+\alpha\ p+ap}{p^2q}>0,\quad w<0)\\ 3b_1\,\mathrm{csch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{b_1}(\varphi-\varphi_0\right] & (b_1=\frac{q+\alpha\ p+ap}{p^2q}>0,\quad w>0)\\ -3b_1\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-b_1}(\varphi-\varphi_0\right] & (b_1=\frac{q+\alpha\ p+ap}{p^2q}<0)\end{cases} \tag{23}$$

式中 φ_0 为积分常数。将 $\varphi(x,t)=px+qt$ 及式(23)($w=f''$)代入式(2)可得到RLW方程式(1)的解。

3) 若取积分常数B=0，且让 $c_1=-4Mk'^2\mu^2$，$b_1=4\mu^2(2-k^2)$，$a_1=-4\mu^2/M$ ，则方程式(19)化为：

$$(w')^2=\frac{4\mu^2}{M}w(M-w)(w-Mk'^2) \tag{24}$$

此时有解 $w=M\,\mathrm{dn}^2(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{M}{3}}\varphi,\ k)$。于是方程式(1)有解 $u(x,t)=a+pqM\ \ \mathrm{dn}^2(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{M}{3}}\varphi,\ k)$，其中dn是另一类椭圆函数。

参 考 文 献

[1] Benjamin T B, Bone J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philos Trans Roy Soc London, 1972, 272A: 47-78

[2] Chuntao Y. The sech^2 solitary wave and its equivalent transformation, Expoiting symmetry in Applied and Numerical analysis[A]. 22-nd AMS-SIAM Summer seminar[C]. (Fort Collins 1992)

[3] Chuntao Y. Regularized long wave equation and inverse scattering transform[J]. J Math Phys, 1993, 34(6): 2618-2630

[4] 王明亮. BBM方程的孤立波解及其相互作用[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1993, 29(1): 7-13

[5] 王巧龙, 黄明游. 正则化长波方程孤立波的数值模拟[J]. 吉林大学学报(自然科学版), 1997, 3:1-13

[6] 刘式适, 陈 华, 付遵涛, 等. Lame函数和非线性演化方程的多级准确解的不变性[J]. 物理学报, 2003, 52(8): 1 842-1 847

[7] Liu X Q, Jiang S. New Sowtion of the 3+1 dimensional Jimbo-Miwa equation[J]. Applied Math and Computation, 2004, 158: 177-184

[8] 刘式适, 刘式达. 物理中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000

编 辑 刘文珍

(上接第656页)

参 考 文 献

[1] Trent G, Sake M. WebSTONE: The first generation in HTTP server benchmarking[J/OL]. Http:// www.sgi.com/ Products/ WebFORCE/ WebStone/paper.html, 2005-01-02

[2] Banga G, Druschel P. Measuring the capacity of a web server[C]. In USENIX Symposium on Internet Technologies and Systems, pages 61-71, Monterey, CA, December 1997

[3] Arlitt M F, Williamson C L. Web Server Workload Characterization: The Search for Invariants[C]. In Proceedings of the ACM SIGMETRICS ’96 Conference, Philadelphia, 1996

编 辑 熊思亮