第 34 卷 第 5 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.34 No.5
2005 年 10 月 Journal of UEST of China Oct. 2005

逆*M*-矩阵的一些性质及应用

杨中原，傅英定，黄廷祝
(电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】通过对逆*M*-矩阵的研究，分别得到了三对角矩阵、正矩阵的逆*M*-矩阵的一些性质，该性质，给出了逆*M*-矩阵可约的充分必要条件，得到了逆*M*-矩阵的一个判定定理。最后，讨论了逆*M*-矩阵Hadamard积的封闭性，得出了一类矩阵关于Hadamard积是封闭的。

关 键 词 逆*M*-矩阵; 三对角矩阵; Hadamard积; 可约矩阵; 正矩阵

中图分类号 O241.6 文献标识码 A

Some Properties of Inverse *M*-Matrices and Their Applications

YANG Zhong-yuan，FU Ying-ding，HUANG Ting-zhu
(School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, some new properties of tridiagonally dominant and positive Inverse *M*-matrices are presented, respectively. Based on these properties, sufficient and necessary conditions of reducible inverse *M*-matrices and general inverse *M*-matrices are derived; Finally, a class of inverse *M*-matrices that is closed under the Hadamard multiplication is also obtained.

Key words inverse *M*-matrix; tridiagonal matrix; hadamard product; reducible matrix; positive matrix

逆*M*-矩阵是一类很重要的矩阵，在许多领域中都得到了广泛的应用，但其理论还很不完善，为此，国际上不少著名学者对它进行了研究[1~4]。本文给出了逆*M*-矩阵的一些性质,并将其应用到逆*M*-矩阵的判定上,讨论了一类逆*M*-矩阵的Hadamard积的封闭性。

1 定义与记号

本文所讨论的都是 n 阶实矩阵，符号约定如下：$\boldsymbol{D}$表示正对角矩阵；$\boldsymbol{P}$表示 n 阶置换矩阵；$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}:=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$;若$\boldsymbol{A}$中的元素 $a_{ij}\geq(>)0$，记为 $A\geq(>)0$ ；$<n>:=\{1,2,\cdots,n\}$ ；$\boldsymbol{Z}:=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\leq 0, i\neq j\}$。

定义 1[5] 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Z}$ ，$\boldsymbol{A}^{-1}\geq 0$，则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{M}$-矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}$ 。设 $\boldsymbol{A}\geq 0$，若 $\boldsymbol{A}^{-1}\in\boldsymbol{Z}$ 则称$\boldsymbol{A}$为逆$\boldsymbol{M}$-矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}^{-1}$。

定义 2[6] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，若 $|a_{ii}|>|a_{ij}|$， $j\neq i$， $j\in<n>$，则称$\boldsymbol{A}$的第 i 行为行元素严格占优。若 $|a_{ii}|>|a_{ij}|$，$j\neq i$， $i,j\in<n>$，则称$\boldsymbol{A}$为行元素严格对角占优矩阵。同理也可以定义列元素严格对角占优矩阵。

2 主要结果

定理 1 若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}^{-1}$，则$\boldsymbol{A}$是可约矩阵的充要条件是存在某个元素 $a_{ij}=0$。

收稿日期：2003 – 09 – 03
作者简介：杨中原(1980 –)，男，硕士，主要从事矩阵方面的研究.

证明如下：

1) 必要性：若$\boldsymbol{A}$是可约矩阵，则根据可约矩阵的定义必有某个元素$a_{ij}=0$。

2) 充分性：由$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}^{-1}$，知$\boldsymbol{A}^{-1}\in\boldsymbol{M}$。假设$\boldsymbol{A}^{-1}$是不可约矩阵，则$\boldsymbol{A}>0$。这与存在$a_{ij}=0$矛盾，从而$\boldsymbol{A}^{-1}$是可约矩阵。又因为$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{A}$有相同的可约性[1]，所以$\boldsymbol{A}$是可约矩阵。

考虑一类特殊的逆$\boldsymbol{M}$-矩阵——三对角逆$\boldsymbol{M}$-矩阵，由定理1可得到以下推论：

推论 1 若$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}^{-1}$且是三对角矩阵，则一定存在置换矩阵$\boldsymbol{P}$，使得矩阵：

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{ii},i\in < k >$为一阶或二阶不可约方阵。

证明 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}\end{pmatrix}$$

因为三对角矩阵每一行都有0元素，而且$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$仍为三对角矩阵，则存在置换矩阵$\boldsymbol{P}_1$使得：

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AP}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1_01_0} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{2_02_0} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{l_0l_0}\end{pmatrix}$$

易知$\boldsymbol{A}_{i_0i_0},i\in < l >$，仍为三对角矩阵，若$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}$是大于三阶的矩阵，由三对角矩阵的本身性质可得$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}$为可约矩阵。由定理1得知，存在置换矩阵$\boldsymbol{P}_2$，使得$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AP}_1^{\mathrm{T}}$中的$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}$化为：

$$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{i_{01}i_{01}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{i_{02}i_{02}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_{0p}i_{0p}}\end{pmatrix}$$

的形式，其中，$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}$的每一小块都是小于3阶的不可约矩阵。同理，存在置换矩阵$\boldsymbol{P}_i$可使得$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$中的每一块大于等于3阶的矩阵都化为$\boldsymbol{A}_{i_0i_0}$中的形式。令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1$，则：

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{A}_{ii}$为一阶或二阶不可约矩阵。

引理 **1** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k1} & \boldsymbol{A}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{kk}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{M}^{-1},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{k1} & \boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{kk}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{M}^{-1}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{ii}$，$\boldsymbol{B}_{jj}\,(i\in < k >,j\in < h >)$分别为阶数不大于3的方阵，则$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}^{-1}$。

由推论1及引理1易得到如下结论：

推论 2[3]　如果 $A\in M^{-1}$， $B\in M^{-1}$ 且为三对角矩阵，则 $C=A\circ B\in M^{-1}$。推论2说明三对角逆M-矩阵对Hadamard 积是封闭的。

定理 2　若A是三对角矩阵，且两条次对角线元素均非零，则 $A\notin M^{-1}$。

证　假设 $A\in M^{-1}$，因三对角矩阵每一行都有零元素，由定理1知，A是一个可约矩阵，而根据条件得A不可约，得矛盾，故 $A\notin M^{-1}$。

下面给出逆M-矩阵一个重要性质。

定理 3 若 $A\in M^{-1}$，则至少存在一行(列)元素为行(列)元素严格占优。

证明　本文证明行元素严格占优的情况。假设 $a_{ii}\le \max\limits_{j\in<n>,j\ne i}\{a_{ij}\}$，$i\in<n>$，由 $A\in M^{-1}$ 知存在正对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，使得 $\tilde{A}=AD$ 为行元素严格占优。设 $\tilde{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$d_p=\min\limits_{i\in<n>}\{d_i\}$，考察 $\tilde{A}$ 的第P行有，$\tilde{a}_{pp}=d_p a_{pp}\le d_p\max\limits_{i\in<n>,j\ne p}\{a_{pj}\}\le d_j\max\limits_{i\in<n>,j\ne p}\{a_{pj}\}$，从而有 $\tilde{a}_{pp}\le\tilde{a}_{pj}$，$j\in<n>$，这与 $\tilde{A}=AD$ 为行元素严格占优矛盾，从而必存在 $i_0\in<n>$ 使得 $a_{i_0i_0}>\max\limits_{j\in<n>,j\ne i_0}\{a_{i_0j}\}$。

引理2[6]　设A具有形状：

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

式中　$a_{ij}\in[x,y]$，$i\ne j$，其中 x,y, 满足：1)　$0<x<y<1$；2)　$\dfrac{x-x^2}{y^2-x^2}\ge n-2$，则 $A\in M^{-1}$。

引理 3[5]　设A为对角元均为正的非负矩阵，则存在非负对角矩阵D使得 $A+D\in M^{-1}$ 当且仅当A具有幂不变零位模式(非负矩阵A与它的一切 A^k ($k\in<n>$)有相同的零位模式时，称A具有幂不变零位模式)。

下面考虑引理3的特殊形式，当 $A>0$ 时，可得如下两个结论。

推论 3　若 $A>0$，则存在 $a>0$ 使得 $A+aI\in M^{-1}$。

证明　令 $A+aI=DB$，其中 $D=\mathrm{diag}\left(a_{11}+a,a_{22}+a,\cdots,a_{nn}+a\right)$，显然$B$具有引理2中$A$形式，且 $b_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}+a}$，易知，当 $a\to+\infty$ 时，有 $0<b_{ij}<1$。不妨设：

$$x=\min\{b_{ij}\}=\frac{a_{i_0j_0}}{a_{i_0i_0}+a}，\quad y=\max\{b_{ij}\}=\frac{a_{i_1j_1}}{a_{i_1i_1}+a}，\quad i\ne j。$$

于是 $\lim\limits_{a\to+\infty}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{a_{i_0j_0}}{a_{i_0i_0}+a}=0$，同理 $\lim\limits_{a\to+\infty}y=0$，故 $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{y^2-x^2}{x-x^2}=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{y^2/x-x}{1-x}=0$。由引理2知，当 $a\to+\infty$ 时有 $\dfrac{x-x^2}{y^2-x^2}\to+\infty$，从而当 $a\to+\infty$ 时，存在 $a_0>0$，使得 $\dfrac{x-x^2}{y^2-x^2}>n-2$。显然，当 $a=a_0$ 时，B满足引理2的条件，但 $B\in M^{-1}$，故 $DB=A+aI\in M^{-1}$。

下面讨论逆M-矩阵关于Hadamard积的性质。

定理 4　设 $A>0$，则存在 $a>0$，使得 $(A+aI)\circ(A+aI)\in M^{-1}$。

证明　令 $C=(A+aI)\circ(A+aI)=DB$，其中 $D=\mathrm{diag}\left(a_{11}+a,a_{22}+a,\cdots,a_{nn}+a\right)$，$b_{ij}=\dfrac{a_{ij}^{\ 2}}{(a_{ii}+a)^2}$，$b_{ii}=1$，$i,j\in<n>$，$i\ne j$。显然，当 $a\to+\infty$ 时有 $0<b_{ij}<1$，因可以验证B满足引理2的条件，所以 $B\in M^{-1}$，从而可得 $C=(A+aI)\circ(A+aI)=DB\in M^{-1}$。

推论 4　设 $A>0$，则存在正对角矩阵D使得 $A+D\in M^{-1}$。

证明　假设 $C=A+D=\tilde{A}+d_0I$，其中 $d_0=\min\{d_i\},i\in<n>$，$\tilde{A}=A+\mathrm{diag}(d_1-d_0,d_2-d_0,\cdots,d_n-d_0)$。易验证，$\tilde{A}>0$。当 $d_0\to+\infty$ 时,由引理2知 $\tilde{A}+d_0I\in M^{-1}$，则 $C=A+D=\tilde{A}+d_0I\in M^{-1}$。

定理 5 设$\boldsymbol{A}>0$，则存在正对角矩阵$\boldsymbol{D}$，使得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\in \boldsymbol{M}^{-1}$。

证 令$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\in \boldsymbol{M}^{-1}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}=\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I$，其中$d_0=\min\{d_i\}, i\in \langle n\rangle$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\mathrm{diag}(d_1-d_0, d_2-d_0,\cdots,d_n-d_0)$，

则$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})=(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)$。当$d_0\to+\infty$时，$(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)$满足定理4的条件，则有：$(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)\in \boldsymbol{M}^{-1}$，从而$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})=(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0 I)\in \boldsymbol{M}^{-1}$。

从定理及引理可以看出，由正矩阵和正对角矩阵复合得到的矩阵如果满足引理2的条件，则得到的逆***M***-矩阵关于Hadamard积是封闭的。

参 考 文 献

[1] Berman A Plemmons R J, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: SIAM Press, Philadelphia, 1994

[2] McDonald J J, Neumann M, Schneider H. edll. Inverse of Unipathic M-matrices[J]. SIAM.J. Matrix Anal. Appl, 1996, (17): 1 025-1 037

[3] Neumann M. A conjecture concerning the Hadamard product of inverse of M-matrices[J]. Lin Alg Appl, 1998, (185): 277-290

[4] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press[M]. London: Cambridge, 1991

[5] Johnson C R. Inverse M-matrices. Lin Alg Appl[J]. 1982, (47): 195-216

[6] Willoughby R A, The inverse M-matrix problem[J]. Lin Alg Appl, 1977, (18): 75-94

编 辑 刘文珍

(上接第702页)

参 考 文 献

[1] Chua L O. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1988,35(10): 1257-1272

[2] Liao X X. Mathematical theory of cellular networks [J]. Science in China, 1994,24(10): 1037-1046

[3] Cao J D, Zhou D M. Stability analysis of delayed cellular neural networks [J]. Neural Networks, 1998,11(9): 1601-1605

[4] Zhong S M. Stability of cellular neural networks with delay [J]. ACTA Electronca Sinca, 1997, 25(2): 125-127

[5]Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks [J]. Neural, Parallel & Scientific Computations, 1996,4: 205-224

[6] Liao X X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastic neural networks [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1996, 14(2): 165-185

[7] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations [M]. New York, Marcel Dekker, 1994

[8] Juang J C. Stability analysis of Hopfield-type neural network [J]. IEEE Trans Neural Networks, 1999, 10: 1 366-1 374

编 辑 刘文珍