第34卷 第5期 电子科技大学学报 Vol.34 No.5
2005年10月 Journal of UEST of China Oct. 2005

Hilbert空间中一类拟变分不等式问题

撒晓婴，周 武
(西南民族大学计算机科学与技术学院 成都 610041)

【摘要】研究了一类新的无穷簇广义集值拟变分不等式问题，利用Nadler定理，得到并构造了逼近解的迭代算法，证明了这类拟变分不等式的解的存在性及该算法产生的迭代序列的收敛性。

关 键 词 拟变分不等式; 算法; 存在性; 收敛性; 投影
中图分类号 O177.91 文献标识码 A

A Infinite Family of Generalized Set-Valued Quasi-Variational Inequality Problems in Hilbert Spaces

SA Xiao-ying，ZHOU Wu
(College of Computer Science and Technology, Southwest University for Nationalities Chengdu 610041)

Abstract In this paper, we introduce and study a new class of infinite family of generalized set-valued quasi-variational inequality problems in Hilbert spaces. We construct an iterative algorithm and prove an existence of solutions for this kind of quasi-variational inequalities. We also prove the convergence of iterative sequences generated by the algorithm. The main results presented in this paper generalized some known results.

Key words quasi-variational inequality; algorithm; existence; convergence; projection

1 预备知识

设H是Hilbert空间，分别用$\|\cdot\|$和$<\cdot,\cdot>$表示H的范数和内积，$K\subset H$是一非空闭凸集，$CB(H)$表示H的一切非空有界闭集之全体，$H(\cdot,\cdot)$表示$CB(H)$上由范数$\|\cdot\|$导出的Hausdorff度量。设K为H的非空闭子集，M，N：$H^{\infty}=H\times H\times\cdots\to H$为两个无穷元非线性映象，$T_i$，$S_i$：$H\to CB(H)$为集值映象($i$=1，2，…)。本文研究问题如下：找$x\in H$，$w_j\in S_j(x)$，$v_j\in T_j(x)(j=1,2,\cdots)$，使得：

$$<N(x, w_1, w_2, \cdots), v-M(x, v_1, v_2, \cdots)>\geqslant 0 \qquad \forall v\in K(x) \tag{1}$$

式中 $K(x)=m(x)+K$，m：$H\to H$为H上的自映象。式(1)为Hilbert空间中无限簇广义集值拟变分不等式。构造逼近问题式(1)解的迭代算法，证明问题式(1)解的存在性及算法产生的迭代序列的收敛性。

定义1 N：$H^{\infty}=H\times H\times\cdots\to H$为一个无穷元非线性映象。

1) 称映象N关于第一变元强单调Lipschitz连续，如果存在常数k>0和t>0，使得：$<N(x, v_1, v_2, \cdots)-N(y, v_1, v_2, \cdots), x-y>\geqslant k\|x-y\|^2$，$\forall x,y,v_j\in H$，$j$=1，2，…，$\|N(x,v_1,\cdots)-N(y,v_1,\cdots)\|\leqslant t\|x-y\|$，$\forall x,y,v_j\in H$，$j$=1，2，…；

2) 称映象N关于第$i+1$个变元Lipschitz连续，如果存在常数α_i>0，使得对任意$x\in H$，$v_i^1,v_i^2,v_j\in H$，$j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots$，有：$\|N(x,v_1,\cdots,v_{i-1},v_i^1,v_{i+1},\cdots)-N(x,v_1,\cdots v_{i-1},v_i^2,v_{i+1},\cdots)\|\leqslant\alpha_i\|v_i^1-v_i^2\|$，$i$=2，3，…

收稿日期：2005－05－11
作者简介：撒晓婴(1957－)，女，讲师，主要从事泛函分析及应用方面的研究.

定义 2 设T：$H \to CB(H)$为一个集值映象，$H(\cdot,\cdot)$为$CB(H)$上的Hausdorff距离，称T为Lipschitz连续的，如果存在常数$\xi>0$，使得：$H(Tx,Ty) \leqslant \xi\|x-y\|$，$\forall x,y \in H$。

引理 1[1] 若$K \subset H$是一非空闭凸集，$\forall z \in H$，存在$u \in K, u = P_K(z)$，当且仅当：$< u-z, v-u > \geqslant 0$，$\forall v \in K$。其中，P_K是H在K上的投影。得知映射P_K：$H \to K$为非扩张的，即对$\forall u,v \in H$，有：$\|P_K(u)-P_K(v)\| \leqslant \|u-v\|$。

引理 2[2] 若$K \subset H$是一非空闭凸集，$K(x)=m(x)+K$，$m:H \to H$，则：$P_{K(x)}v = m(x) + P_K[v-m(x)]$，$\forall x,v \in H$。

利用引理1和引理2，易证得下述引理：

引理 3 设$K \subset H$是一非空闭凸集，$K(x)=m(x)+K$，$m:H \to H$。设M，N：$H^{\infty}=H\times H\times\cdots \to H$为两个无穷元非线性映象，$T_i$，$S_i$：$H \to CB(H)$为集值映象($i$=1, 2, $\cdots$)。则$(x;w_1,w_2,\cdots;v_1,v_2,\cdots)$为式(1)的解当$x\in H$，$w_i \in S_i(x)$，$v_i \in T_i(x)$满足：

$$x = x - M(v_1,v_2,\cdots) + m(x) + P_K[M(v_1,v_2,\cdots) - \lambda N(x,w_1,w_2,\cdots) - m(x)] \tag{2}$$

式中 $\lambda>0$为常数.

引理 4[3] 设H为Hilbert空间，T：$H \to CB(H)$为集值映象，那么$\forall \varepsilon>0$和$\forall x,\ y \in H,\ u \in T(x)$，存在$v \in T(y)$，使得：$\|u-v\| \leqslant (1+\varepsilon)H(T(x),T(y))$。

2 算 法

利用上述引理，可得到求解式(1)的迭代算法如下[4]：

算法 1 任取$x_0 \in H, w_i^0 \in S_i(x_0), v_j^0 \in T_j(x_0)$，令：$x_1 = x_0 - M(x_0,v_1^0,v_2^0,\cdots) + m(x_0) + P_K[M(x_0,v_1^0,v_2^0,\cdots) - \lambda N(x_0,w_1^0,w_2^0,\cdots) - m(x_0)]$。其中，$\lambda>0$为常数。由引理4得知存在$w_i^1 \in S_i(x_1)$，$v_j^1 \in T_j(x_1)$，使得：$\|w_i^0 - w_i^1\| \leqslant (1+1)H(S_i(x_1),S_i(x_0))$，$i$=1，2，$\cdots$ $\|v_j^0 - v_j^1\| \leqslant (1+1)H(T_j(x_1),T_j(x_0))$，$j$=1，2，$\cdots$。

令$x_2 = x_1 - M(x_1,v_1^1,v_2^1,\cdots) + m(x_1) + P_K[M(x_1,v_1^1,v_2^1,\cdots) - \lambda N(x_1,w_1^1,w_2^1,\cdots) - m(x_1)]$，其中，$\lambda>0$为常数。由归纳法，可得序列如下：$x_{p+1} = x_p - M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots) + m(x_p) + P_K[M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots) - \lambda N(x_p,w_1^p,w_2^p,\cdots) - m(x_p)]$，其中，$w_i^p \in S_i(x_p)$，$\|w_i^p - w_i^{p+1}\| \leqslant (1+(p+1)^{-1})H(S_i(x_p),\ S_i(x_{p+1}))$ $v_j^p \in T_j(x_p)$，$\|v_j^p - v_j^{p+1}\| \leqslant (1+(p+1)^{-1})H(T_j(x_p),\ T_j(x_{p+1}))$ $i,j=1,2,\cdots;\ \ p=0,1,2,\cdots$。

3 主要结果

定理 1 设H是一个Hilbert空间，K为非空闭子集，$K(x)=m(x)+K$，$m:H \to H$为一Lipschitz连续映象具有常数$\mu>0$。设N：$H^{\infty}=H\times H\times\cdots \to H$为无穷元非线性映象，关于第一变元强单调具有常数为$k>0$，关于每一个变元Lipschitz连续具有对应的常数为α和$\alpha_i(i=1,2,\cdots)$。设M：$H^{\infty}=H\times H\times\cdots \to H$为无穷元非线性映象，关于第一变元强单调具有常数为$l>0$，关于每一个变元Lipschitz连续具有对应的常数为β和$\beta_j(j=1,2,\cdots)$。设T_i，S_i：$H \to CB(H)$为集值映象，关于Hausdorff度量Lipschitz连续具有对应的常数分别为$\xi_i(i=1,2,\cdots)$和$\eta_i(i=1,2,\cdots)$。若：

$$0 \leqslant \theta = 2\sqrt{1-2l+\beta^2} + 2\mu + 2\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\beta_j + \sqrt{1-2k\lambda+\alpha^2\lambda^2} + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\alpha_i < 1 \tag{3}$$

则无限簇广义集值拟变分不等式(1)存在解(x，w_1，w_2，$\cdots$，v_1，v_2，$\cdots$)，且由算法1得到的迭代序列$\{x_p\},\{w_i^p\},\{v_j^p\}$分别强收敛于$x$，$w_i$, v_j (i=1，2，$\cdots$；j=1，2，$\cdots$)。

证明 由迭代算法1，P_K的非扩张性质，m的Lipschitz连续性以及关于映象N和M的假设条件有：

$$\|x_{p+1}-x_p\| \leqslant \|x_p - M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots) + m(x_p) - m(x_{p-1}) - x_{p-1} + M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots)\| +$$
$$\|M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots) - M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots) + m(x_p) - m(x_{p-1}) -$$

$$\begin{aligned}&\lambda(N(x_{p-1},w_1^p,w_2^p,\cdots)-N(x_{p-1},w_1^{p-1},w_2^{p-1},\cdots))\|\leqslant\\&\quad 2\|x_p-x_{p-1}-(M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots)-M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots))\|+2\|m(x_p)-m(x_{p-1})\|+\\&\quad \|x_p-x_{p-1}-\lambda(N(x_p,w_1^p,w_2^p,\cdots)-N(x_{p-1},w_1^{p-1},w_2^{p-1},\cdots))\|\leqslant\\&\quad 2\|x_p-x_{p-1}-(M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots)-M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots))\|+2\mu\|x_p-x_{p-1}\|+\\&\quad \|x_p-x_{p-1}-\lambda(N(x_p,w_1^p,w_2^p,\cdots)-N(x_{p-1},w_1^{p-1},w_2^{p-1},\cdots))\|\end{aligned}\tag{4}$$

因为：

$$\begin{aligned}&\|x_p-M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots)-x_{p-1}+M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots)\|\leqslant\|x_p-x_{p-1}-(M(x_p,v_1^p,v_2^p,\cdots)-\\&\quad M(x_{p-1},v_1^p,v_2^p,\cdots))\|+\|M(x_{p-1},v_1^p,v_2^p,\cdots)-M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^p,v_3^p,\cdots)\|+\cdots+\|M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots,\\&\quad v_{m-1}^{p-1},v_m^p,v_{m+1}^p,\cdots)-M(x_{p-1},v_1^{p-1},v_2^{p-1},\cdots,v_{m-1}^{p-1},v_m^{p-1},v_{m+1}^p,v_{m+2}^p,\cdots)\|+\cdots\leqslant\sqrt{1-2l+\beta^2}\|x_p-x_{p-1}\|+\\&\quad \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\|v_j^p-v_j^{p-1}\|\sqrt{1-2l+\beta^2}\|x_p-x_{p-1}\|+\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\beta_j(1+1/p)\|x_p-x_{p-1}\|\end{aligned}\tag{5}$$

且：

$$\begin{aligned}&\|x_p-x_{p-1}-\lambda(N(x_p,w_1^p,w_2^p,\cdots,w_n^p,\cdots)-N(x_{p-1},w_1^{p-1},w_2^{p-1},\cdots,w_n^{p-1},\cdots))\|\leqslant\\&\quad\sqrt{1-2k\lambda+\alpha^2\lambda^2}\|x_p-x_{p-1}\|+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\alpha_i(1+1/p)\|x_p-x_{p-1}\|\end{aligned}\tag{6}$$

由式(4)、(5)和式(6)有：

$$\|x_{p+1}-x_p\|\leqslant\theta_p\|x_p-x_{p-1}\|\tag{7}$$

式中　$\theta_p=2\sqrt{1-2l+\beta^2}+2\mu+2(1+1/p)\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\beta)+\sqrt{1-2k\lambda+\alpha^2\lambda^2}+\lambda(1+1/p)\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\alpha_i$ 。

显然，$\theta_p\to\theta$ 。由式(3)知0$\leqslant\theta<1$，从而由式(7)可知$\{x_p\}$为Cauchy序列。于是，存在 $x\in H$ ，使得 $x_p\to x$ 。又因为：

$$\|w_i^p-w_i^{p-1}\|\leqslant(1+1/p)H(S_i(x_p),S_i(x_{p-1}))\leqslant(1+1/p)\eta_i\|x_p-x_{p-1}\|,\ \text{i=1，2，}\cdots,$$

$$\|v_j^p-v_j^{p-1}\|\leqslant(1+1/p)H(T_j(x_p),T_j(x_{p-1}))\leqslant(1+1/p)\xi_i\|x_p-x_{p-1}\|,\ \text{j=1，2，}\cdots。$$

于是 $\{w_i^p\}$ 和 $\{v_j^p\}$ 也是H中的Cauchy序列，从而存在 $w_i,v_j\in H$ ，使得 $w_i^p\to w_i(p\to\infty)$ ， $v_j^n\to v_j(p\to\infty)$ $i,j=1,2,\cdots$ 。又因为： $d(w,S_i(x))\leqslant\|w_i-w_i^p\|+d(w_i^p,S_i(x))\leqslant\|w_i-w_i^p\|+\eta_i\|x_p-x\|$

且 $w_i^p\to w_i,x_p\to x$ ，易知 $d(w_i,S_i(x))=0$ 。因此， $w_i\in S_i(x)$ ，$i=1,2,\cdots$ 。同理可证 $v_j\in T_j(x)$ ， $j=1,2,\cdots$ 。由算法1及引理3得知 $x,w_i,v_j(i,j=1,2,\cdots)$ 为无限簇广义集值拟变分不等式问题式(1)的解，且有：

$$x_p\to x(p\to\infty),\quad w_i^p\to w_i\in S_i(x),v_j^p\to v_j\in T_j(x),\quad i,j=1,2,\cdots$$

证毕

参　考　文　献

[1] Baiocchi C, Capelo A. Applications to Free Boundary Problems[M]. Wiley & Sons, New York, 1984

[2] Huang N J. On the generalized implicit quasivariational inequalities [J]. J Math Anal Appl，1997, 216: 197-210

[3] 王元恒, Banach空间中无限簇广义集值拟变分包含[J]. 浙江大学学报, 2004, 31(4): 381-386

[4] Nadler S B. Muliti-valued contraction mappings [J]. Pacific J Math, 1969, 30: 475-488

编　辑　刘文珍