

## 多混沌时分同步

张 勇, 陈天麒

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】**研究了多混沌时分同步方法,论证了由多个单一混沌同步系统组成多混沌时分同步系统的理论基础,在驱动方和响应方的多个混沌系统之间实现了通过其离散同步驱动信号时分复用地占用同步信道而构成多混沌时分同步系统。基于统一混沌系统族仿真了由3个混沌系统构成的多混沌时分同步系统,并总结了多混沌时分同步的条件以及其在保密通信方面的应用潜力。

**关键词** 多混沌系统; 混沌同步; 时分复用; 离散方法

**中图分类号** TN974; TP271; O332 **文献标识码** A

## Multi-Chaos Time Division Synchronization

ZHANG Yong, CHEN Tian-qi

(School of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** The method of multi-chaos time division synchronization is proposed and the theory bases of many single chaotic synchronized systems making up of one multi-chaos synchronized system are attested by which it is achieved that the drivers and responses of many chaotic systems form one multi-chaos synchronized system with one synchronized channel between them used by their discrete synchronized signals in time divisional method. Then, based on the unifying chaotic systems, three chaotic time division usage systems are simulated. Finally, this paper summarizes the condition of multi-chaos time division synchronization and its application in secure communication.

**Key words** multi-chaos system; chaotic synchronization; time division usages; discrete method

在混沌同步理论及其应用方面已经有大量的研究成果<sup>[1-12]</sup>,充分表明了混沌同步是自然界、科学实验和工程中普遍存在的物理现象。目前,混沌同步的研究主要有3种类型,即混沌系统间的完全同步<sup>[1-4]</sup>、广义同步<sup>[5-8]</sup>、相同步<sup>[10-12]</sup>;实现混沌同步的驱动方和响应方大都只包含一个混沌系统,同步系统的驱动信号独享同步传输信道。直观意义上,可以将多个混沌同步系统的驱动系统集中在驱动方,将它们的响应系统集中在响应方,借助多个同步信道传输其多个同步驱动信号,就可以简单地实现多混沌同步系统。目前关于多混沌系统同步的文献还不多见,本文借助文献[13-14]讨论共用一个同步信道情况下多混沌同步系统的实现方法,即单一信道中同时传输多个混沌同步驱动信号。

### 1 多混沌时分同步

假设驱动方具有 $N$ 个混沌系统,分别记为 $A_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ ,响应方也具有相应的 $N$ 个混沌系统,分别记为 $B_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ ,且 $A_i$ 与它相应的 $B_i$ 能形成完全同步、广义同步或相同步,驱动方和响应方之间仅有一

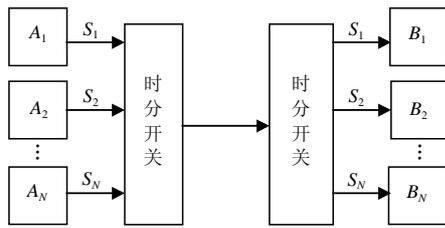


图1 多混沌时分同步系统

个同步信号传输信道,  $N$ 个混沌系统对的同步驱动信号  $\{s_i\}_{i=1}^N$  时分复用同一信道, 于是形成所谓的多混沌时分同步系统, 如图1所示。

假设由  $A_i$  与  $B_i$  能构成单一混沌同步系统, 可以通过计算系统的条件Lyapunov指数<sup>[1]</sup>或是构造Lyapunov泛函<sup>[2-3,14]</sup>来判断它们能否同步。这里的前提条件是假设对于所有的  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $A_i$  与  $B_i$  能构成单一混沌同步系统, 在这种情况下, 有如下两个定理:

**定理 1** 如果两个连续混沌系统可以构成同步系统, 那么一定存在一个采样间隔, 使得以此采样间隔对两个混沌系统离散化后的离散混沌系统之间同样能构成同步。

证明: 本文仅给出PC同步情况下的证明过程<sup>[1]</sup>。在PC同步下, 不妨设构成同步的两个连续混沌系统分别记为  $\frac{dx}{dt} = f(x, s)$ ,  $\frac{dy}{dt} = f(y, s)$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^n$ ,  $s = h(x)$  或  $s = \frac{dh(x, s)}{dt}$  为同步的驱动信号, 由已知条件得,  $t \rightarrow \infty$  时,  $\|x - y\| \rightarrow 0$ 。记  $e = y - x$ , 则

$$\frac{de}{dt} = f(y, s) - f(x, s) = f(x + e, s) - f(x, s) \quad (1)$$

在  $e=0$  处有一个稳定的奇点。于是, 在  $e=0$  处存在一个稳定的超球域, 使得落在该域内的点收敛至稳定点  $e=0$ 。

对于任意给定的采样间隔  $\tau$ , 离散化式(1)得到:

$$e((n+1)\tau) = e(n\tau) + [f(x(n\tau) + e(n\tau), s(n\tau)) - f(x(n\tau), s(n\tau))] \tau \quad (2)$$

由于混沌的内在随机性和有界性, 式(2)运动的某些点会落入超球域中, 当式(2)的某个点落在超球域内时, 将采样间隔  $\tau$  缩小为充分小的  $\tau_0$ , 同时设混沌系统的最大Lyapunov指数为  $\lambda$ , 则由式(2)得到:

$$|e((n+1)\tau_0) - e(n\tau_0)| \leq |e(n\tau_0) - e((n-1)\tau_0)| \exp(\lambda \tau_0) \tau_0 \quad (3)$$

记  $e(n) = e(n\tau_0)$ ,  $\Delta(n) = e(n) - e(n-1)$ , 则式(3)简化为:

$$|\Delta(n+1)| \leq |\Delta(n)| \exp(\lambda \tau_0) \tau_0 \quad (4)$$

由于  $\tau_0$  充分小, 所以,  $n \rightarrow \infty$  时,  $e(n) \rightarrow \text{const}$ , 因超球域内仅有一个稳定奇点, 因此,  $e(n) \rightarrow 0$ 。

选取离散Lyapunov泛函  $V(n) = e^2(n)/2$ , 则:

$$\Delta V(n) = V(n+1) - V(n) = e(n)A(n)\tau_0 + A^2(n)\tau_0^2/2 \leq 0 \quad (5)$$

式中

$$A(n) = f[x(n) + e(n), s(n)] - f[x(n), s(n)]$$

将具体的混沌方程式代入式(5), 求得的满足式(5)等于零的  $\tau_0$  值即为  $\tau_0$  值的上限。

**定理 2** 多个单一混沌同步系统一定可以使用离散化方法构成多混沌时分同步系统。

证明: 由定理1可知, 连续混沌同步系统可以离散化为整数序列  $n$  的离散函数系统, 即连续时间演化系统可以转化为整数序列  $n$  的演化系统。对于离散混沌同步系统, 它本身就是整数序列  $n$  的演化系统。如果有  $N$  对混沌系统参与多混沌系统同步, 则可以将一个小时间段  $T$  等间隔的取出  $N$  个时间点, 依次传送各个混沌系统的同步信号, 多个混沌系统的同步信号共用一个传输信道。因为各个同步信号均以序列的形式出现, 不再是时间的函数, 所以传输具有很大的灵活性。例如, 小时间段  $T$  分成等间隔的  $N$  段, 每一小段传输几个至几十个某混沌系统的同步信号序列, 只要响应方具有相同的数据接收模式, 就可以实现相应混沌系统间的同步, 即能实现多混沌时分同步。

由定理1和定理2可知, 实现图1所示的多混沌同步系统有2种方法:

(1) 将一个小时间段  $T$  分成  $N$  份, 如果在占空比为  $1/N$  的条件下, 各个混沌系统对能各自构成同步, 则, 各个混沌系统之间可以时分复用同一同步信道。由定理1可知, 总可以使  $T$  充分小, 以至于达到时分同步的要求。这种方法需要参与同步的多个混沌系统都具有相同的采样间隔, 工程实现上难度稍大。

(2) 离散化处理。由定理2可知, 所有参与同步的多个混沌系统均可以离散化为整数序列  $n$  的演化系统, 即可以构成一种所谓的离散化多混沌时分同步系统。不妨记第  $i$  个混沌同步系统对的离散同步驱动信

号为 $s_i$ , 同步信道中每时间段 $T$ 内传输的信号形式为 $\left\{s_j^i\right\}_{j=1}^m$ , 即在每个时间段 $T$ 内, 第1个混沌同步系统对传送 $m_1$ 个离散同步驱动信号后, 第2个混沌同步系统对传送 $m_2$ 个离散同步驱动信号, 依次类推。在响应方, 也按相同的节拍接收离散同步驱动信号。这种方法要求驱动方和响应方均使用数字化和存储技术实现。

## 2 仿真分析

下面以统一混沌系统族为例<sup>[13-14]</sup>, 介绍离散化处理的多混沌时分同步方法:

(1) 选择单个混沌对的同步方法, 并验证单个混沌对是否能构成同步系统。这里采用直接耦合完全同步法<sup>[15]</sup>, 驱动方和响应方的混沌系统均为统一混沌系统,  $\alpha$  取0、0.8和1.0, 分别对应于Lorenz方程、Lü系统和Chen系统, 方程式如下:

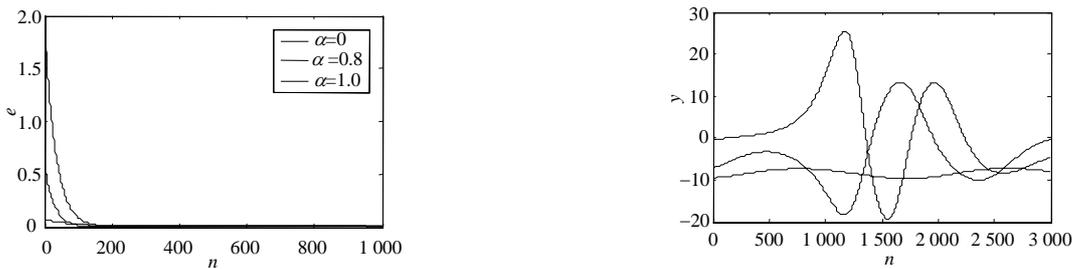
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (25\alpha + 10)(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ \frac{dz}{dt} = xy - (8 + \alpha)z/3 \end{cases} \quad (6)$$

易知, 在 $\alpha$ 的各个参数下, 为驱动信号, 各个单一混沌系统对均能构成完全同步<sup>[2]</sup>。

(2) 将把各个混沌同步系统对使用适当的采样间隔转化为离散形式, 并保证离散化形式下仍然能够同步。经验证, 在 $\alpha$ 的各个参数下, 取采样间隔为0.001 s, 各个单一混沌系统对仍能构成混沌同步。

3) 根据需要设计时分复用同步信道。这里取时间段 $T = 0.0001$  s, 并把它分成3等分, 每个小时间片用于传输一个离散同步信号, 即信道中离散信号的形式为 $\{y_i^{Lo} \ y_i^{Lv} \ y_i^C\}_{i=1}^N$ , 上标Lo、Lv和C分别对应于Lorenz方程、Lü系统和Chen系统。显然, 离散化同步条件下, 时间段 $T$ 的大小以及传输信号的速率均与混沌系统的采样间隔无关。如果多混沌时分同步系统用于保密通信, 则需要根据具体的需要设计同步信道, 可以采用文献[16]提到的方法实现具有较强抗噪能力的通信。

按上面的3步实现了具有3个混沌系统的多混沌时分同步, 如图2所示。图2a中横坐标为按步长为0.0001 s演化的整数序列 $n$ , 即离散化的点数, 纵坐标为 $x$ 信号的同步误差, 各个混沌系统的同步起点均为 $n = 0$ 。从图2可以看出, 3个混沌系统通过时分复用同一信道的方法实现了多混沌同步。这里, 信道信号的传输速率为10 kHz(时间间隔步长为0.0001 s), 而离散化的采样间隔为0.001 s, 由于采用数字化处理技术, 传输速度的大小不受连续混沌系统采样间隔的限制。共用的同步信道上传输离散形式的信号 $y$ , 如图2b所示。



a 施加直接耦合同步后, 响应方与驱动方的绝对误差

b 同步信道中时分复用传输的离散驱动信号  $y = \{y_i^{Lo} \ y_i^{Lv} \ y_i^C\}_{i=1}^{1000}$

图2 统一混沌系统的时分同步仿真实验结果

## 3 结论

综合上面的分析可以看出, 对于多个单一混沌同步系统, 一定可以借助离散化方法实现多混沌系统时分同步, 所有的单一混沌同步方法仍然有效。参与构成多混沌同步的各个相应的单一混沌同步对能够同步是多混沌时分同步的充要条件。多混沌时分同步系统的信道中, 时分复用了多个混沌系统的同步信号, 具

有更强的保密性能。可以把有用信号隐藏在其中某些同步信号中,把干扰信号隐藏在另一些同步信号中,响应方(接收方)只需要有选择地同步那些带有有用信息的混沌系统,从而实现更加有效的保密通信。

### 参 考 文 献

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821- 825
- [2] 刘 杰, 陈士华, 陆君安. 统一混沌系统的投影同步与控制[J]. 物理学报, 2003, 52(7):1 595-1 599
- [3] 魏 荣, 王行愚. 连续时间混沌系统的自适应H 同步方法[J]. 物理学报, 2004, 53(10):3 298-2 302
- [4] Hua C C, Guan X P. Synchronization of chaotic systems based on adaptive observer design[J]. Chin. Phys., 2004, 13(9): 1 391-1 395
- [5] Kocarev L, Parlitz U. Generalized synch- ronzation, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems[J]. Pys. Rev. Lett., 1996, 76(11):1 816-1 819
- [6] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems[J]. Rhys. Rev. E, 1995, 51(2): 980-994
- [7] Rogers E A, Kalra R, Schroll R D, et al. Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a liquid crystal spatial light moduatot[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 93(8):84 101-84 104
- [8] Uchida A, McAllister R, Meucciand R, et al. Generalized synchronization of chaos in identical systems with hidden degrees of freedom[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 91(17):174 101-174 104
- [9] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M. Transitions to synchrony in coupled bursting neurons[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 92(2): 28 101-28 104
- [10] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators[J]. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(11): 1 804-1 807
- [11] Ivanchenko M V, Osipov G V, Shalf-eev V D, et al. Phase synchronization of chaotic intermittent oscillations[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 92(13):134 101-134 104
- [12] He K, Chian A C-L. On-off collective imperfect phase synchronization and bursts in wave energy in a turbulent state[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 91(3):34 102-34 104
- [13] Lü J, Chen G, Zhang S. The compound structure of a new chaotic attractor[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 14: 669-672
- [14] 陶朝海, 陆君安. 统一混沌系统的控制[J]. 物理学报, 2003, 52(2): 281-284
- [15] Murali K, Lakshmanan M. Chaotic dynamics of the driven Chua's circuit[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1993, 40(1): 836-840
- [16] Carroll T L. Noise-resistant chaotic synchronization[J]. Phys. Rev. E, 2001, 64(1):15 201-15 204

编 辑 徐安玉