最少部件数的并联备份问题

唐应辉，喻国建，刘　燕
(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】如何快速提高系统的可靠度和最少部件数的并联备份问题，一直是系统可靠性问题中的研究热点。该文从系统的任意状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 出发，讨论了上述问题，并证明了在子系统可靠度最小的位置上并联相同部件可使系统的可靠度提高最快，同时给出了最优算法和实例验证。

关　键　词　系统；可靠度；部件；状态；并联
中图分类号　O213.2　　　　文献标识码　A

Problem of the Minimal Instruments in the Parallel Connection

TANG Ying-hui，YU Guo-jian，LIU Yan
(School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　How to improve quickly the reliability of system and prove to be the minimal instruments in the parallel connection have been a long hotter topics in the research of reliability of system. The same problems from the starting of any state $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ are discussed in this paper. It is has proved that the reliability of system get the most quick improvement from the system state $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ if the same instruments is parallel to the subsystem made up of the parts of the reliability.　Meanwhile, the algorithm and example are given.

Key words　System;　reliability;　instrument;　state;　parallel

考虑由n个相互独立的子系统串联组成的一个系统，而第j个子系统由k_j个相互独立的第j种部件并联组成(j=1，2，…，n)。为了提高系统的可靠度，工程上常常采用在子系统上并联相同部件来实现。问题是，在哪个子系统上并联备份才能使系统的可靠度提高最快？另外，在要求系统可靠度达到某个定值的条件下，如何使系统的部件数最少？文献[1]从系统状态 $(k,k,\cdots,k)$ 出发，证明了在部件可靠度最小的位置并联相同部件可使系统的可靠度提高最快，而且给出了算法(不是最优算法)和实例。本文在文献[1]的基础上，从系统的任意状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 出发，不仅讨论了如何快速提高系统的可靠度问题，而且讨论了在系统可靠度达到某个定值的条件下使部件数最少的问题，得到了满意结果，并给出了最优算法和实例验证。

1　主要结果

讨论问题如下：

(1) 系统并联结构如图1所示。

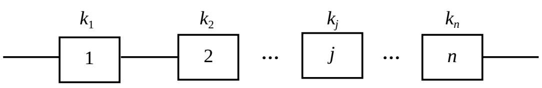


图1　系统并联结构图

收稿日期：2003 – 09 – 24
基金项目：教育部高校骨干教师基金资助项目(Y02012011001001)；四川省学术与技术带头人培养基金资助项目(Y02001011001003)
作者简介：唐应辉(1963 –)，男，博士，教授，博士生导师，主要从事排队论、系统可靠性和决策理论及应用等方面的研究.

图中，第j个子系统由k_j个相互独立的相同部件并联而成(j=1，2，…，n)，该系统由这n个相互独立的子系统串联而成。

为了提高该系统的可靠度，通常是在子系统上并联相同部件来实现。问题是如何加并联备份部件才能使系统可靠度提高最快？

(2) 在要求系统可靠度达到某个定值的条件下，如何才能使得并联部件数达到最少？即有如下的优化问题：求 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，使得：

$$\begin{cases}\min f(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\\ \text{s.t. } R(K)\geqslant R_0 \quad 0\leqslant R_0\leqslant 1\\ k_i=1,2,\cdots; \quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

为了讨论方便，假定 p_j 为第j种部件的可靠度；R_0 为事前要求的系统可靠度，系已知常数 $(0\leqslant R_0\leqslant 1)$；$R=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为系统的状态；$R(K)$ 为系统在状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 时整个系统的可靠度；$R_j(k_j)$ 为当第j个子系统有 k_j 个部件并联时，第j个子系统的可靠度(j=1，2，…，n)。

对于问题(1)，从系统状态 $(k,k,\cdots,k)$ 出发，文献[1]证明了：

引理　如果从系统状态 $(k,k,\cdots,k)$ 出发，在部件可靠度p_1，p_2，…，p_n最小的位置上并联一个相同部件，将使系统可靠度增加最快。

下面从系统任意的状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 出发，讨论上述问题，其结果如下：

定理1　设系统从任意的状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 出发，如果 $\dfrac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\dfrac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j\right\}$，则此时在第$t$个子系统上并联一个相同部件，将使系统可靠度增加最快。

证明　令 $q_i=1-p_i$，$i=1,2,\cdots,n$。由于：

$$R(K)=R(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\prod_{i=1}^{n}[1-(1-p_i)^{k_i}]=\prod_{i=1}^{n}[1-(q_i)^{k_i}] \tag{1}$$

若在第t个子系统的位置上并联一个部件，系统的可靠度上升为(不妨设j>t)：

$$R(k_1,k_2,\cdots,k_{t-1},k_t+1,k_{t+1},\cdots,k_j,\cdots,k_n)=[1-(q_t)^{k_t+1}]\prod_{i=1,i\neq t}^{n}[1-(q_i)^{k_i}]=\frac{1-(q_t)^{k_t+1}}{1-(q_t)^{k_t}}\prod_{i=1}^{n}[1-(q_i)^{k_i}] \tag{2}$$

若在其他任意的位置，不妨设在第j($j\neq t$，j=1，2，…，n)个子系统上并联一个相同部件，系统的可靠度上升为：

$$R(k_1,k_2,\cdots,k_t,\cdots,k_{j-1},k_j+1,k_{j+1}\cdots,k_n)=\frac{1-{q_j}^{k_j+1}}{1-{q_j}^{k_j}}\prod_{i=1}^{n}[1-(q_i)^{k_i}] \tag{3}$$

由定理假设条件有 $\dfrac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t\geqslant\dfrac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j$。又由 $R_t(k_t)=1-(1-p_t)^{k_t}=1-(q_t)^{k_t}$，$R_j(k_j)=1-(1-p_j)^{k_j}=1-(q_j)^{k_j}$ 得到：

$$\frac{1-q_t}{1-(q_t)^{k_t}}+q_t>\frac{1-q_j}{1-(q_j)^{k_j}}+q_j \tag{4}$$

所以

$$\frac{1-(q_t)^{k_t+1}}{1-(q_t)^{k_t}}>\frac{1-(q_j)^{k_j+1}}{1-(q_j)^{k_j}} \tag{5}$$

于是，由式(2)、(3)和(5)得：

$R(k_1,k_2,\cdots,k_{t-1},k_t+1,k_{t+1},\cdots,k_j,\cdots,k_n)>R(k_1,k_2,\cdots,k_t,\cdots,k_{j-1},k_j+1,k_{j+1},\cdots,k_n)$。　　证毕

定理 2　设 $R_t(k_t)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{R_j(k_j)\}$，且脚标$t$唯一，从系统的任意状态 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 出发，如果下述条件之一成立：

(1) $p_t \geqslant p_j, j=1,2,\cdots,n, \quad j \neq t$；

(2) $p_t < p_j$, 且$k_t = k_j, \quad j=1,2,\cdots,n, \quad j \neq t$。

则在第t个子系统上并联一个相同部件，即在子系统可靠度最小的位置上并联一个与该子系统部件相同的部件，将使系统可靠度增加最快。

证明 (1) 若 $p_t \geqslant p_j, j=1,2,\cdots,n, j \neq t$，则由 $R_t(k_t)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{R_j(k_j)\}$，得：

$$p_t\left[\frac{1}{R_t(k_t)}-1\right] > p_j\left[\frac{1}{R_j(k_j)}-1\right] \qquad j=1,2,\cdots,n;\ j\neq t \tag{6}$$

于是 $\dfrac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\dfrac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j\right\}$。由定理1知，此时在第$t$个子系统上，即子系统可靠度最小的位置上并联一个与该子系统部件相同的部件，将使系统可靠度增加最快。

(2) 若 $p_t < p_j$，且 $k_t = k_j, j=1,2,\cdots,n, j\neq t$，由引理知下一步应在第$t$个子系统并联一个相同部件，将使系统可靠度增加最快。

推论1 如果符合定理2条件的t不唯一，即存在两个或两个以上的子系统可靠度同时达到最小值，且对应部件的可靠度又符合定理2条件的(1)或(2)，这时在它们之中对应单部件可靠度最大的位置上并联一个部件，将使系统的可靠度增加最快。

推论2 设 $R_t(k_t)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{R_j(k_j)\}$，$\tilde{I}=\{i: p_t \geqslant p_i, i=1,2,\cdots,n, i\neq t\}$，$I=\{1,2,\cdots,n\}-\{\tilde{I},t\}$。令：

$$\frac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0}=\max_{j\in I}\left\{\frac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j\right\},\quad \frac{p_m}{R_m(k_m)}-p_m=\max\left\{\frac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0},\frac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t\right\}$$

则在第m个子系统上并联一个与该子系统部件相同的部件，将使系统可靠度增加最快。

注：推论2的思路是，将系统中的n个子系统分成两大类：第一类是符合定理2中条件1)的子系统；第二类是不符合定理2中条件1)的子系统。对于第二类子系统，按定理1可求出：

$$\frac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0}=\max_{j\in I}\left\{\frac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j\right\}$$

然后按

$$\frac{p_m}{R_m(k_m)}-p_m=\max\left\{\frac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0},\frac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t\right\}$$

这样，在第m个子系统上并联一个与该子系统部件相同的部件，将使系统可靠度增加最快。

对于问题(2)，利用上述定理和相关推论，其算法步骤如下：

(1) 给定初始系统状态($k_1,k_2,\cdots,k_n$)，转入步骤(2)；

(2) 计算 $R_i(k_i)(i=1,2,\cdots,n)$，$R(K)$，若 $R(K)\geqslant R_0$，得到最优解 $K^*=(k_1^*,k_2^*,\cdots,k_n^*)$，结束。否则，转入步骤(3)；

(3) 选定可靠度 $R_t(k_t)$ 最小的子系统，即 $R_t(k_t)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{R_j(k_j)\right\}$，若$t$唯一，转入步骤(5)；否则，转入步骤(4)；

(4) 选定子系统可靠度最小且单部件可靠度最大的子系统，不妨设为第t个子系统，转入步骤(5)；

(5) 对于所有j,($j\neq t$，且 $R_j(k_j)\neq R_t(k_t)$,j=1，2，⋯，n)，若满足 $p_t\geqslant p_j$ 或 $p_t<p_j$，且 $k_t=k_j$，则$k_t=k_t+1$，转入步骤(2)；否则，转入步骤(6)；

(6) 若 $I=\left\{i: p_t<p_j, j=1,2,\cdots,n, i\neq t\right\}$，求出 $\dfrac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0}=\max\limits_{j\in I}\left\{\dfrac{p_j}{R_j(k_j)}-p_j\right\}$，转入步骤(7)

(7) 求出 $\dfrac{p_m}{R_m(k_m)}-p_m=\max\left\{\dfrac{p_{j_0}}{R_{j_0}(k_{j_0})}-p_{j_0},\dfrac{p_t}{R_t(k_t)}-p_t\right\}$，则 $k_m = k_m+1$，转入步骤(2)。

2　实例验证

在本节中，通过与文献[1]相同的实例进行分析和比较，进一步说明本文所得结果的意义和所给出算法的优越性。

例　已知5种部件的可靠度分别为p_1=0.96，p_2=0.93，p_3=0.85，p_4=0.80，p_5=0.75，第i个子系统由k_i个第i种部件并联而成(i=1,2,3,4,5)。求最优的k_1, k_2, k_3, k_4, k_5使5个系统组成的串联系统的可靠度不小于0.98，且使总部件数$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$最少。

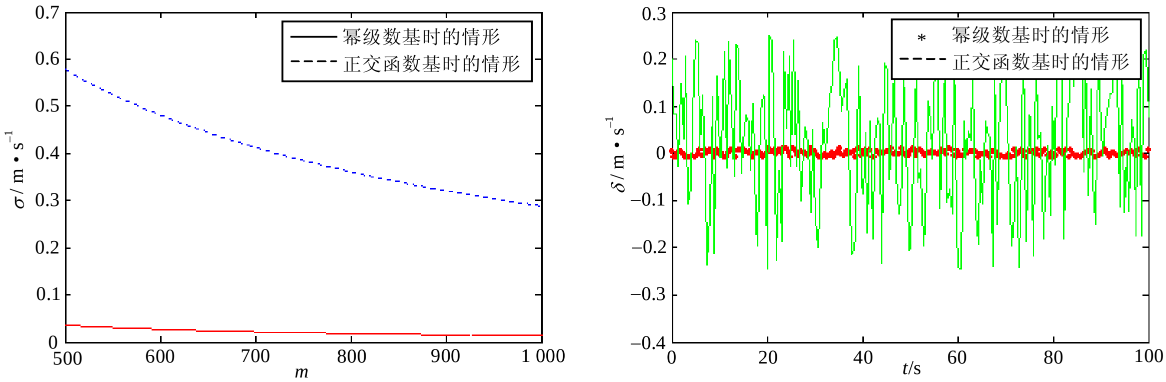
解：按本文所得结论求解，具体算法步骤只需10步可得最优解为：k_1^*=2，k_2^*=2，k_3^*=3，k_4^*=4，k_5^*=4，而文献[1]需要19步才能得到该最优解。

参　考　文　献

[1] 曹晋华, 程　侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986
[2] 程　侃. 寿命分布类与可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999
[3] 马振华. 运筹学与最优化理论卷[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001
[4] 毛　勇, 李才良, 唐应辉. 修理延迟的单部件系统的可靠性分析[J]. 电子科技大学学报, 2000, 29(5): 545-548
[5] Tang Yinghui. Some new reliability problem and results for one unit repairable system[J]. Microelectronics & Reliability, 1996, 36(4): 199-202

编　辑　刘文珍

(上接第773页)



a　标准差比较　　　b　精度比较

图1　取不同基时的速度拟合性能的比较

3　结　论

本文介绍了一种利用曲线拟合来获取目标体的速度信息的方法，它是利用激光雷达所测的目标体的距离信息来获得其速度信息的，从而使得激光雷达的测量系统结构大为简化。并通过比较得知，采用幂级数族为基进行最小二乘曲线拟合可得到良好的测量性能。

参　考　文　献

[1] 刘智深, 宋小全. 非相干脉冲激光多普勒雷达测速系统. 科学通报[J]. 2001, 46(24): 2 080-2 085
[2] 李庆扬. 数值分析(第4版)[M]. 北京:清华大学出版社, 2001. 90-98
[3] 黄　波. 空间交会激光雷达关键技术及其仿真:[学位论文][D]. 成都: 电子科技大学, 2003
[4] 梁晋文. 误差理论与数据处理修订版[M]. 北京: 中国计量出版社, 2001. 67-73

编　辑　孙晓丹