第 34 卷　第 6 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.6
2005 年 12 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Dec. 2005

五对角矩阵的分解及其逆元素的快速算法

刁新军[1]，黄廷祝[1]，曾　翎[1]，冉瑞生[2]
(1. 电子科技大学应用数学学院　成都　610054;　2. 电子科技大学计算机科学与工程学院　成都　610054)

【摘要】提出了五对角矩阵的一种分解方法，其运算量比建立在Gaussian消元法基础上的***LU***方法运算量少，拓广了相应文献的结果，给出了*n*阶五对角矩阵的扭曲分解式，得到了五对角矩阵逆矩阵元素的快速算法，结果推广到块五对角矩阵。

关　键　词　五对角矩阵;　逆矩阵的元素;　算法;　块五对角矩阵
中图分类号　O241　　　　文献标识码　A

A Fast Algorithm for Inverse of Five-Diagonal Matrices

DIAO Xin-jun[1]，HUANG Ting-zhu[1]，ZENG Ling[1]，RAN Rui-sheng[2]
(1. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu　610054;　2. School of Computer Science and Engineering, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　The algorithm and explicit formulae for the elements of the inverse of five-diagonal matrices are presented. The results are obtained by relationships between the elements of the inverse and the elements of special twisted decompositions of it. Operation count of the algorithm have an advantage over that of the standard ***LU*** decomposition based on the Gaussian elimination, and some results can also be extended to block five-diagonal matrices. Result obtained improves result in the known corresponding references.

Key words　five-diagonal matrix;　inverse;　algorithm;　block five-diagonal matrix

1　注记

五对角矩阵是一类比三对角矩阵更广泛的重要矩阵，在实际中有许多应用，例如，应用有限差分和有限元方法求解椭圆或抛物差分方程，求含边界值问题的常(偏)微分方程的数值解，样条插值和修匀问题中，都会遇到五对角矩阵。

考虑方程组为：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$；$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$是下面五对角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ e_3 & d_3 & a_3 & \ddots & \ddots & \\ & e_4 & \ddots & \ddots & & c_{n-2} \\ & & \ddots & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & e_n & d_n & a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

收稿日期：2004 – 04 – 16
基金项目：教育部“新世纪优秀人才支持计划”基金资助项目
作者简介：刁新军(1971 –)，男，博士生，主要从事电子商务与物流管理和管理信息系统方面的研究.

式中　假定$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵且存在$\boldsymbol{LU}$分解。

2　五对角矩阵的扭曲分解

直接求解方程组式(1)的有效方法是：利用Gaussian变换求$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{LU}$分解。当$\boldsymbol{A}$是对角占优或对称正定矩阵时，$\boldsymbol{A}$可以进行Cholesky分解，其运算量仅是$\boldsymbol{LU}$分解的一半。文献[1]给出了块三对角矩阵的$\boldsymbol{LU}$，$\boldsymbol{UL}$和扭曲分解。文献[2]给出了把一个仅改变主对角线上首和末位置元素的五对角Toeplitz矩阵分解为两个三对角Toeplitz矩阵$\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$的乘积，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$。文献[3-4]给出了三对角矩阵的一些分解方法，文献[5]研究了五对角矩阵。在此，给出五对角矩阵的扭曲分解。

定理 **1**　设$\boldsymbol{A}$是形如式(2)的n阶五对角矩阵，则对任意$j=1,2,\cdots,n$，$\boldsymbol{A}$有如下扭曲分解：

$$
\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j=\begin{pmatrix}
m_1 & & & & & & & \\
n_2 & \ddots & & & & & & \\
l_3 & \ddots & m_{j-2} & & & & & \\
 & \ddots & n_{j-1} & m_{j-1} & & l_{j+1} & & \\
 & & l_j & n_j & m_j & n_{j+1} & \ddots & \\
 & & & & & m_{j+1} & \ddots & l_n \\
 & & & & & & \ddots & n_n \\
 & & & & & & & m_n
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
1 & t_1 & s_1 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & 1 & t_{j-2} & s_{j-2} & & & \\
 & & & 1 & t_{j-1} & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & s_{j-1} & t_j & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & s_{n-2} & t_{n-1} & 1
\end{pmatrix}\triangleq
$$

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & & & \\
\vdots & A_1 & \ddots & & \vdots & & \\
 & \ddots & \cdots & m_j & \vdots & \ddots & \\
 & & & & \vdots & A_2 & \vdots \\
 & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & \vdots
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
\ddots & \cdots & \cdots & & & & \\
 & \ddots & B_1 & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & B_2 & \ddots & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \ddots
\end{pmatrix}\tag{3}
$$

式中　l_i,m_i,n_i,s_i,t_i 可以由下述算法求得(在$\boldsymbol{L}_j$，$\boldsymbol{U}_j$中不存在的l_i,m_i,n_i,s_i,t_i的值均为0)。

(1) 确定A_2区域和B_2区域中的未知元素，当i＞j时，$l_n=c_{n-2}$，$n_n=b_{n-1}$，$m_n=a_n$，$t_{n-1}=\dfrac{d_n}{m_n}$，$s_{n-2}=\dfrac{e_n}{m_n}$(不失一般性，可假定$l_{n+1}=s_{n-1}=0$)；$l_i=c_{i-2}$，$n_i=b_{i-1}-l_{i+1}t_i$，$m_i=a_i-n_{i+1}t_i-l_{i+2}s_i$，$t_{i-1}=\dfrac{d_i-n_{i+1}s_{i-1}}{m_i}$，$S_{i-2}=\dfrac{e_i}{m_i}$($i=n-1$，$n-2$，$n-2,\cdots,j+1$)。

(2) 确定A_1区域和B_1区域中的未知元素，当i＜j时，$l_3=e_3,n_2=d_2,m_1=a_1,t_1=\dfrac{b_1}{m_1}$，$s_1=\dfrac{c_1}{m_1}$ (不失一般性，可假定$l_2=s_0=0$)；$l_{i+2}=e_{i+2}$，$n_{i+1}=d_{i+1}-l_{i+1}t_{i-1}$，$m_i=a_i-n_it_{i-1}-l_is_{i-2}$，$t_i=\dfrac{b_i-n_is_{i-1}}{m_i}$，$s_i=\dfrac{c_i}{m_i}$($i$=2，3，⋯，$j$–2)；当$i=j$时，$l_i=e_i$，$n_i=d_i-l_it_{i-2}-n_{i+1}s_{i-1}$，$m_{i-1}=a_{i-1}-n_{i-1}t_{i-2}-l_{i-1}s_{i-3}-l_{i+1}s_{i-1}$，$t_{i-1}=\dfrac{b_{i-1}-n_{i-1}s_{i-2}-l_{i+1}t_i}{m_{i-1}}$，$m_i=a_i-n_it_{i-1}-n_{i+1}t_i-l_is_{i-2}-l_{i+2}s_i$。

证明　对式(3)右边$\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j$利用矩阵乘法得到的$n$阶五对角矩阵和矩阵$\boldsymbol{A}$的对应元素比较，按定理中的步骤易得：

(1) $j=1$时，分解$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1$就是$\boldsymbol{UL}$分解。当$j=n$时，分解$\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{U}_n$就是$\boldsymbol{LU}$分解。

(2) 仿定理1，五对角矩阵的扭曲分解还有另外一种形式，用分解式(3)的记号表示如下：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j\triangleq\begin{pmatrix}\ddots &&&&&& \\ \vdots & \ddots &&&&& \\ \vdots & A_1 & \ddots &&&& \\ & \ddots & \vdots & m_j & \cdots & \ddots & \\ && \ddots && \ddots & A_2 & \ddots \\ &&&&& \ddots & \vdots \\ &&&&&& \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddots & \cdots & \cdots &&&& \\ & \ddots & B_1 & \ddots &&& \\ && \ddots & \cdots & \cdots && \\ &&& 1 &&& \\ &&& \vdots & \ddots && \\ &&& \ddots & B_2 & \ddots & \\ &&&& \ddots & \cdots & \ddots\end{pmatrix}$$

(3) 扭曲分解所需的运算量小于$\boldsymbol{LU}$分解所需的运算量，将应用定理1得到五对角矩阵的扭曲分解所需计算量与文献[2]中的$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$分解和标准$\boldsymbol{LU}$分解运算量进行比较，结果如表1所示。

表1 算法复杂性

算法	乘法运算量	加法运算量	总 计
$\boldsymbol{LU}$(文献[2])	$11n-16$	$8n-13$	$19n-29$
$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$ (文献[2])	$10n-8$	$6n-6$	$16n-14$
$\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j$(本文)	$6n-10$	$4n-6$	$10n-16$

3 五对角矩阵逆元素的显式求解算法

利用扭曲分解可以得到五对角矩阵的逆矩阵元素的显式求解公式。

定理 2 设$\boldsymbol{A}$是形如式(2)的矩阵，设$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则$\boldsymbol{C}$的第$j$ $(j=1,2,\cdots,n)$列元素表示为：

$$c_{jj}=1/m_j\text{，}\quad c_{ij}=-t_ic_{i+1,j}\ (i=j-1)\text{，}\quad c_{ij}=-t_ic_{i+1,j}-s_jc_{i+2,j}\ (i=j-2,j-3,\cdots,1)$$
$$c_{ij}=-t_{i-1}c_{i-1,j}-c_{i-2,j}s_{j-2}\ (i=j+1,j+2,\cdots,n)$$

式中 m_i,s_i,t_i 均由定理1所确定。

证明 设$\boldsymbol{C}_j$是$\boldsymbol{C}$的第j列向量，$\boldsymbol{e}_j$是单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第j列向量，易得：

$$\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{C}_j=\boldsymbol{e}_j\text{，}\quad \boldsymbol{L}_j\boldsymbol{e}_j=m_j\boldsymbol{e}_j$$

综合上两式得：

$$\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{C}_j=\frac{1}{m_j}\boldsymbol{e}_j$$

解上面的方程组可以得到定理2。 证毕

(1) 由矩阵$\boldsymbol{A}$的可逆性易知$m_j\neq 0$，$j=1,2,\cdots,n$，因此上式总是有意义的；

(2) 算法复杂性分析，按照定理2求出$\boldsymbol{C}_j$所需的运算量：乘法$2n(n-1)$，加法$n(n-2)$，求出逆矩阵$\boldsymbol{C}$所需的总运算量：乘法$2n^2+8n-16$，加法$n^2+6n-10$。

4 块五对角矩阵

科学工程中的许多问题需要解高阶稀疏线性方程组，常常涉及块矩阵的研究。设块五对角矩阵为：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{C}_1 &&& \\ \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{C}_2 && \\ \boldsymbol{F}_3 & \boldsymbol{D}_3 & \boldsymbol{A}_3 & \ddots & \ddots & \\ & \boldsymbol{F}_4 & \ddots & \ddots && \boldsymbol{C}_{n-2} \\ && \ddots && \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{B}_{n-1} \\ &&& \boldsymbol{F}_n & \boldsymbol{D}_n & \boldsymbol{A}_n\end{pmatrix} \tag{4}$$

式中　$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{D}_i,\boldsymbol{F}_i$ 均为同阶方阵，则对任意 $j=1,2,\cdots,n$，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 有类似的扭曲分解如下：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\tilde{\boldsymbol{L}}_j\tilde{\boldsymbol{U}}_j \tag{5}$$

其中：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_j=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{M}_1 & & & & & & & \\
\boldsymbol{N}_2 & \ddots & & & & & & \\
\boldsymbol{L}_3 & \ddots & \boldsymbol{M}_{j-2} & & & & & \\
 & \ddots & \boldsymbol{N}_{j-1} & \boldsymbol{M}_{j-1} & & \boldsymbol{L}_{j+1} & & \\
 & & \boldsymbol{L}_j & \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{M}_j & \boldsymbol{N}_{j+1} & \ddots & \\
 & & & & & \boldsymbol{M}_{j+1} & \ddots & \boldsymbol{L}_n \\
 & & & & & & \ddots & \boldsymbol{N}_n \\
 & & & & & & & \boldsymbol{M}_n
\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_j=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{S}_1 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_{j-2} & \boldsymbol{S}_{j-2} & & & \\
 & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_{j-1} & & & \\
 & & & & \boldsymbol{I} & & & \\
 & & & \boldsymbol{S}_{j-1} & \boldsymbol{T}_j & \boldsymbol{I} & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & \boldsymbol{S}_{n-2} & \boldsymbol{T}_{n-1} & \boldsymbol{I}
\end{pmatrix}$$

式中　$\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{S}_i,\boldsymbol{T}_i$ 类似于定理1中的 m_i,n_i,l_i,s_i,t_i。

　　定理 **3**　设 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是一个形如式(6)的矩阵，设 $\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}=\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}_{ij})$，则 $\boldsymbol{Q}$ 的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n)$ 块元素可以用下列式子得到：

$$\boldsymbol{Q}_{jj}=\boldsymbol{M}_j^{-1}，\ \boldsymbol{Q}_{ij}=-\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{Q}_{i+1,j}\ (i=j-1)，\ \boldsymbol{Q}_{ij}=-\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{Q}_{i+1,j}-\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{Q}_{i+2,j}\qquad i=j-2,j-3,\cdots,1$$

$$\boldsymbol{Q}_{ij}=-\boldsymbol{T}_{i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1,j}-\boldsymbol{S}_{j-2}\boldsymbol{Q}_{i-2,j}\qquad i=j+1,j+2,\cdots,n$$

　　证明　设 $\boldsymbol{Q}_j$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的第 j 列向量，设 $\boldsymbol{E}_j=(0,\cdots,0,\boldsymbol{I},0\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 表示块单位矩阵 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的列向量，构造块对角矩阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}_j=\mathrm{diag}(\boldsymbol{I},\cdots,\boldsymbol{I},\boldsymbol{M}_j,\boldsymbol{I},\cdots,\boldsymbol{I})$，其中 $\tilde{\boldsymbol{M}}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的分块形式相同，显然 $\tilde{\boldsymbol{M}}_j$ 是非奇异的，易得：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_j\boldsymbol{E}_j=\tilde{\boldsymbol{M}}_j\boldsymbol{E}_j，\ \tilde{\boldsymbol{L}}_j\tilde{\boldsymbol{U}}_j\boldsymbol{Q}_j=\boldsymbol{E}_j$$

合并上两式得：

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_j^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}_j\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{Q}_j=\boldsymbol{E}_j$$

解这个矩阵方程组，可得定理3。　　　　证毕

参 考 文 献

[1] Meuran G. A reviews on the inverses of symmetric tridiagonal matrix and block tridiagonal matrices[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl, 1992, 13(2): 707-728

[2] Diele F, Lopez L. The use of the factorization of five-diagonal matrices by tridiagonal Toeplitz matrices[J]. Appl. Math. Lett, 1998, 11(3): 61-69

[3] McColl W F. Scalable computing, in “Computer Science Today: Recent Trends and Developments”[C]. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin_New York, 1995

[4] Ilan B O, Leoncini M. Stable solution of tridiagonal systems[J]. Num. Algorithms, 1998, 18: 361-388

[5] Jyh J, Horng S. A new algorithm for 5-band Toeplitz matrix inversion with application to GCV smoothing spline computation[J]. Statistic & Probability Lett, 1999, 45: 317-324

编　辑　刘文珍