·计算数学·

4*n*-2阶发展方程的酉半群讨论

张利勋，刘永智，欧中华，代志勇，彭增寿

(电子科技大学光电信息学院　成都　610054)

【摘要】将4*n*-2阶发展方程转化为一阶发展方程组，求得4*n*-2阶发展方程的生成算子，在一定的条件下由E.Hille-E.Yosida定理生成半群。讨论了4*n*-2阶发展方程的生成算子生成的算子半群的酉性，研究表明：*n*>1时均要附加共轭算子范数相等条件时才构成酉群，当*n*＝1时称Golstein酉群，提供了比文献[3]更简便的半环证明方法。

关　键　词　半群;　酉群;　生成算子

中图分类号　O177.1　　　文献标识码　A

Unitary-Semigroups of 4*n*-2 Order Evolution Equation

ZHANG Li-xun，LIU Yong-zhi，OU Zhong-hua，DAI Zhi-yong，PENG Zeng-shou

(School of Optic-Electronic Information，UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　A generating operator of 4*n*-2 order evolution equation is obtained and this operator generates a semigroup when 4*n*-2 order evolution equation is changed into one order evolution equation set. The unitary semigroups which are generated by　generating operator of 4*n*-2 order evolution equation is discussed. The unitary semigroups (*n*>1) are proven true when they append an equal yoke operator norm. In particular, the semigroup (*n*=1) is called Golstein's unitary and a more simply probative method to Ref.[3] by semiring is offered.

Key words　semigroup;　unitary group;　generating operator

在20世纪40年代创建的半群理论是研究时滞分布参数系统的主要方法[1]，到目前已构成以一、二阶发展方程为核心的系统论体系，完备地应用于许多重要的数学物理偏微分方程，如波动方程、热传导方程、薛定愕方程、流体动力学方程组、KdV方程、反应扩散方程等以及由这些方程通过适当的方式耦合起来的各种耦合方程组，这些方程可转化为一阶或二阶发展方程[2-3]。

在Hilbert空间中算子半群的酉性是对应的发展方程的形式解是否归一化的前提条件。本文讨论文献[4]生成算子生成的算子半群的酉性。

1　Hilbert空间

条件1　$\{\exp(tA);\ t\geq 0\}$ 是Banach空间$\boldsymbol{E}$中自伴稠定算子$\boldsymbol{A}$生成的半群，零点在预解集 $\rho(\boldsymbol{A})=\{\lambda:\lambda$ 使 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为正则算子$\}$中。

对任何$\boldsymbol{E}$中的稠定算子$\boldsymbol{B}$，记 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{m-1},\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{I},m=1,2,\cdots,n$， $\boldsymbol{I}$ 是$\boldsymbol{E}$中恒等算子，在定义域 $D(\boldsymbol{B}^m)=\{x:\boldsymbol{B}^m x\in\boldsymbol{E},\forall x\in\boldsymbol{E}\}$ 上引入范数：

$$\|x\|_{\boldsymbol{B}^m}=(<x,x>+<\boldsymbol{B}^m x,\boldsymbol{B}^m x>)^{1/2},\forall x\in D(\boldsymbol{B}^m)$$

容易证明 $D(\boldsymbol{B}^m)$ 在该范数 $\|\bullet\|_{\boldsymbol{B}^m}$ 下是一个Banach空间。记：$\boldsymbol{E}_n=D(\boldsymbol{B}^{n-1})\times\cdots\times D(\boldsymbol{B}^2)\times D(\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{E}$ 。在 $\boldsymbol{E}_n$ 上引入范数：

$$\forall\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\tau}\in\boldsymbol{E}_n,\quad \|\boldsymbol{y}\|_n=(\sum_{j\in J}\|x_j\|^2_{n-j}+\|x_n\|^2)^{1/2}$$

收稿日期：2003－04－29

基金项目：国防预研基金资助项目

作者简介：张利勋(1968－)，男，讲师，在职博士生，主要从事非线性光学及光电信息处理方面的研究.

$\boldsymbol{E}_n$ 在范数 $\|\bullet\|_{\boldsymbol{E}_n}$ 下是一个Banach空间。记 $D(\boldsymbol{M}_n)=D(\boldsymbol{B}^n)\times\cdots\times D(\boldsymbol{B}^2)\times D(\boldsymbol{B})$，容易证明 $D(\boldsymbol{M}_n)$ 在 $\boldsymbol{E}_n$ 中稠密。Banach空间 $\boldsymbol{E}_n$ 在内积 $<\boldsymbol{y}，\boldsymbol{y}>=\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}^2$ 下是Hilbert空间。

2　4*n*-2阶发展方程

文献[5]寻找到发展方程 $\mathrm{d}^n x/\mathrm{d}t^n=\boldsymbol{A}x+f(n\in N)$ 的生成算子生成的算子半群。高阶发展方程的标准型并不多，其中最重要的是：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^{4n-2}x}{\mathrm{d}t^{4n-2}}+\boldsymbol{A}x=f\\ x(0)=x_0,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=x_1,\cdots,\dfrac{\mathrm{d}x_{4n-3}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=x_{4n-2}\end{cases}\tag{1}$$

式中　方程右边为输入条件；左边为系统处理区。阶数不再是任何正整数，而是$4n-2\,(n\in N)$。该方程具有系统论的典型特征。本文的目的在于获得方程(1)的生成算子生成的算子酉半群。

3　生成算子

方程(1)中假定 $x=x_1,\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\cdots,\dfrac{\mathrm{d}x_{4n-3}}{\mathrm{d}t}=x_{4n-2}$，方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ -\boldsymbol{A} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}$。其中，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_{4n-2})^\tau$，$\boldsymbol{F}=(0,0,\cdots,f)^\tau$，$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$。方程(1)中$\boldsymbol{A}$满足条件1，由谱分解定理得 $\boldsymbol{A}=\int_\varepsilon^\infty\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda$，记 $\boldsymbol{B}=\int_\varepsilon^\infty\lambda^{1/(4n-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda$，$\{\boldsymbol{E}_\lambda:0\leq\varepsilon<\lambda<\infty\}$ 是$\boldsymbol{A}$的谱族，则$\boldsymbol{B}$也是自伴稠定算子。$-\boldsymbol{A}=(\mathrm{i}\boldsymbol{B})^{4n-2}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，记 $\boldsymbol{M}_n=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ -\boldsymbol{A} & 0\end{bmatrix}_{4n-2}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{4n-3}\\ (\mathrm{i}\boldsymbol{B})^{4n-2} & 0\end{bmatrix}_{4n-2}$，如果i$\boldsymbol{B}$具有条件1，那么 $\boldsymbol{M}_n$ 是方程(1)的生成算子，$\boldsymbol{I}_{4n-3}$是$4n-3$阶恒等矩阵算子。

4　结论陈述

如果$\boldsymbol{A}$满足条件1，则 $\boldsymbol{M}_n$ 具有定义域 $D(\boldsymbol{M}_n)=D(\boldsymbol{A})\times D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})\subseteq\boldsymbol{E}_n=D(\boldsymbol{A}^{(4n-3)/(4n-2)})\times\cdots\times D(\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)})\times\boldsymbol{E}$，并且 $\boldsymbol{M}_n$ 在 $\boldsymbol{E}_n$ 上生成半群 $\{\exp(t\,\boldsymbol{M}_n);t\geq0\}$。

$$\exp(t\,\boldsymbol{M}_n)=\frac{1}{4n-2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{A}^{-k/(4n-2)}\exp(t\,\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})-\pi k\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k}\\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}$$

$\{\exp(t\boldsymbol{M}_n):t\geq0,n\in N,n>1\}$ 是酉群的充要条件为：$\forall y\in\boldsymbol{E}_n$，

$$\|\exp(t\int_\varepsilon^\infty\lambda^{1/(4n-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}=$$

$$\|\exp(t\int_\varepsilon^\infty\lambda^{1/(4n-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\lambda\exp(\pi(1+\frac{2(n+m)-1}{4n-2})\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}\qquad m=1,2,\cdots,2n-1$$

式中　$\{\boldsymbol{E}_\lambda:0\leq\varepsilon<\lambda<\infty\}$ 是$\boldsymbol{A}$在Hilbert空间$\boldsymbol{E}$中的谱族。

5　结论证明

记$\boldsymbol{U}$＝i$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{U}^*=-\boldsymbol{U}$，$-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{4n-2}$。$\forall\lambda>0$，记 $R(\lambda,\boldsymbol{U})=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U})^{-1}$，那么 $\forall x\in\boldsymbol{E}$，

$$\|R(\lambda,\boldsymbol{U})x\|^2=\int_\delta^\infty\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{E}_\mu x\|^2}{|\lambda-\mathrm{i}\mu|^2}\leq\frac{1}{\lambda^2}\int_\delta^\infty\mathrm{d}\|\boldsymbol{E}_\mu x\|^2=\frac{1}{\lambda^2}\|x\|^2$$

所以，$\|R(\lambda,\boldsymbol{U})\|\leq1/\lambda$，由文献[1]得算子 $\boldsymbol{U}$ 生成半群 $\{\exp(t\boldsymbol{U});\ t\geq0\}$。$\forall x,\ y\in D(\boldsymbol{U})$，$<\boldsymbol{U}x,\ y>+<x,\boldsymbol{U}y>=0$，$\forall x,y\in D(\boldsymbol{U}),<\boldsymbol{U}x,y>+<x,\boldsymbol{U}y>=0$，$\forall t\geq0$，$Z(\exp(t\boldsymbol{U}))=\boldsymbol{E}$，$x\in D(\boldsymbol{U})$，$\exp(t\boldsymbol{U})x\in D(\boldsymbol{U})$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<\exp(t\boldsymbol{U})x,\ \exp(t\boldsymbol{U})x>=0$，从而$\|\exp(t\boldsymbol{U})x\|=\|x\|$。又由 $D(\boldsymbol{U})$ 在$\boldsymbol{E}$中稠密得$\|\exp(t\boldsymbol{U})x\|=\|x\|,x\in\boldsymbol{E}$。因此，$\{\exp(t\boldsymbol{U});t\geq0\}$ 是$\boldsymbol{E}$中的酉半群。由文献[4]得：

$$\exp(t\boldsymbol{M}_n)=\frac{1}{4n-2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{A}^{-k/(4n-2)}\exp(t\boldsymbol{A}^{1/(4n-2)}\exp(\pi\frac{2(n+m)}{4n-2}\mathrm{i})-\pi k\frac{2(n+m)}{4n-2}\mathrm{i})\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k} \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}$$

记：

$$\boldsymbol{A}_k=\frac{1}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-3}\boldsymbol{B}^{-k}\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i})-\pi k\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}),\ \boldsymbol{N}_k=\begin{bmatrix} & \boldsymbol{I}_{4n-2-k} \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_k & \end{bmatrix}$$

$$\forall \boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_{4n-2})^{\tau}\in\boldsymbol{E}_n,<x_l,x_m>=\begin{cases}1 & (l=m)\\ 0 & (l\neq m)\end{cases}(l,m=1,2,\cdots,n),\quad \exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}=\sum_{k=0}^{4n-2}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{N}_k\boldsymbol{y}$$

$$\begin{aligned}\left\|\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}\right\|_{\boldsymbol{E}_n}^2 &=\sum_{k=0}^{4n-3}(\sum_{j=k+1}^{4n-2}\left\|\boldsymbol{A}_k x_j\right\|_{B^{n+k-j}}^2+\sum_{j=1}^{k}\left\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}^{4n-2}x_j\right\|_{B^{k-j}}^2=\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{j=1}^{4n-2}\left\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}^{n+k-j}x_j\right\|^2=\\ &\frac{1}{(4n-2)^2}\sum_{k=0}^{4n-3}\sum_{j=1}^{4n-2}\sum_{m=h=0}^{4n-3}\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{B}^{n-j}x_j\|^2+\\ &\frac{1}{(4n-2)^2}\sum_{j=1}^{4n-3}\sum_{\substack{m,h=0\\ m\neq h}}^{4n-2}\|\boldsymbol{B}^{n-j}x_j\|^2\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\exp(t\boldsymbol{B}\exp(-\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\times\\ &\sum_{k=0}^{4n-3}\exp(\mathrm{i}\frac{2k(h-m)}{4n-2}\pi))=\frac{1}{4n-2}\sum_{j=1}^{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-3}\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{B}^{n-j}x_j\|^2=\\ &\frac{1}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-3}\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}{}^2\end{aligned}$$

计算 $\exp(t\boldsymbol{M}_n)$ 的范数一阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}\right\|_{\boldsymbol{E}_n}^2=\frac{-2\boldsymbol{B}}{4n-2}\sum_{m=0}^{4n-2}\sin(\frac{2m\pi}{4n-2})\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}{}^2 \tag{2}$$

当n=1时，式(2)为0，即 $\{\exp(t\boldsymbol{M}_n):t\geq 0\}$ 是酉群。当 $n\geq 2$ 时，式(2)为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\exp(t\boldsymbol{M}_n)\boldsymbol{y}\right\|_{\boldsymbol{E}_n}^2= &\frac{-2\boldsymbol{B}}{4n-2}\sum_{m=1}^{2n-1}\{\sin(\frac{2m\pi}{4n-2})\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}{}^2+\\ &\sin(\pi+\frac{2m\pi}{4n-2})\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi(1+\frac{2(n+m)-1}{4n-2})\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}{}^2\}\end{aligned}$$

即当且仅当

$$\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}=\|\exp(t\boldsymbol{B}\exp(\pi(1+\frac{2(n+m)-1}{4n-2})\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}$$

此时 $\{\exp(t\boldsymbol{M}_1):t\geq 0\}$ 为酉群。将 $\boldsymbol{B}=\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda^{1/(4n-2)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\lambda}$ 代入得：

$$\|\exp(t\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda^{1/4n-2}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\lambda}\exp(\pi\frac{2(n+m)-1}{4n-2}\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}=\|\exp(t\int_{\varepsilon}^{\infty}\lambda^{1/4n-2}\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\lambda}\exp(\pi(1+\frac{2(n+m)-1}{4n-2})\mathrm{i}))\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{E}_n}$$

$$\exp(t\boldsymbol{M}_1)=\cosh(t\mathrm{i}\boldsymbol{B})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}^{-1}\sinh(t\mathrm{i}\boldsymbol{B})\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{B}^2 & 0\end{pmatrix}$$

式中 $\cosh(t\boldsymbol{B})=(\exp(t\boldsymbol{B})+\exp(-t\boldsymbol{B}))/2,\quad \sinh(t\boldsymbol{B})=(\exp(t\boldsymbol{B})-\exp(-t\boldsymbol{B}))/2$。

$\exp(t\boldsymbol{M}_1)$ 不需要附加条件就具有酉性，称为Golstein酉群，所以本文 $\exp(t\boldsymbol{M}_1)$ 是酉群的证明比文献[3]的证明简便，说明对 $\exp(t\boldsymbol{M}_n)$ 的酉性讨论找到一般方法。

参 考 文 献

[1] 王康宁. 分布参数控制系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986. 30-78.
[2] 李大潜, 陈韵梅. 非线性发展方程[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
[3] Golstein J A. Semigroups and second-order differential equations[J]. Func Anal, 1969, 4: 50-70.
[4] 张利勋, 刘永智, 欧中华, 等. 4n-2阶发展方程的生成算子半群[J]. 电子科技大学学报, 2005, 34(4): 559-561.
[5] 张利勋, 王康宁. 算子半群和n阶发展方程的积分[J]. 科学通报, 1997, 42(8): 797-800.

编 辑 漆 蓉