第 35 卷　第 1 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.35　No.1
2006 年 2 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Feb. 2006

迭代矩阵特征值模的界

冉瑞生，黄廷祝

(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】在用迭代法解线性方程组时，迭代矩阵的谱半径估计在迭代法的收敛性分析中起着重要的作用。该文对一类Baily-Crabtree型对角占优矩阵 $\boldsymbol{M}$，给出了迭代矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值模的上下界估计。并以此为基础，在一定条件下给出了当 $\boldsymbol{M}$ 是 $\alpha-$严格对角占优矩阵时的 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值模的上下界估计。并以具体例子说明了所得结果的有效性。

关　键　词　迭代矩阵;　特征值;　谱半径;　对角占优

中图分类号　O151.26　　　文献标识码　A

Bounds for Modules of Eigenvalues of Iterative Matrices

RAN Rui-sheng，HUANG Ting-zhu

(School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　For solving the linear system with the iterative method, it is very important to estimate the spectral radius of the iterative matrices. In this paper we present an estimate for bounds of module of eigenvalues of the iteration matrix $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ for a kind of Baily-Crabtree diagonally dominant matrix $\boldsymbol{M}$. Then, under a certain condition, the estimate for bounds of the module of eigenvalues of $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ is presented when $\boldsymbol{M}$ is a $\alpha-$strictly diagonally dominant matrix. Numerical examples for illustrating validity of results are presented.

Key words　iterative matrix;　eigenvalue;　spectral radius;　diagonal dominance

1　注　记

为了方便，记 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 是 n 阶复矩阵的集合。设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，记：

$$R_i(\boldsymbol{M})=\sum_{j\neq i}\left|m_{ij}\right|,\quad S_i(\boldsymbol{M})=\sum_{j\neq i}\left|m_{ji}\right|$$

简记为 R_i, S_i。在求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{A}$ 非奇)时，常常将 $\boldsymbol{A}$ 分裂为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，然后构造迭代格式：$\boldsymbol{X}^{k+1}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}^{k}+\boldsymbol{d}$ ($k=0,1,2,\cdots$)来求解。因此迭代矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 估计在迭代法收敛性分析中起着非常重要的作用，引起了不少研究者的兴趣。文献[1]中得到了当 $\boldsymbol{M}$ 是严格对角占优矩阵时 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 的估计式。文献[2]在 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ 满足：$\left|m_{ii}\right|>\alpha \boldsymbol{R}_i+(1-\alpha)\boldsymbol{S}_i$ ($\alpha\in[0,1]$)时讨论了 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 的估计。文献[3]在 $\boldsymbol{M}$ 是Nekrasov矩阵的条件下讨论了 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 的估计式。下面简要介绍其结果，为了表述的方便，首先引入Nekrasov矩阵的定义。

定义 1[4]　设矩阵 $\boldsymbol{M}\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，令

$$\boldsymbol{\Omega}_1(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{M}),\quad \boldsymbol{\Omega}_i(\boldsymbol{M})=\sum_{j=1}^{i-1}\left|m_{ij}\right|\frac{\boldsymbol{\Omega}_j(\boldsymbol{M})}{\left|m_{jj}\right|}+\sum_{j=i+1}^{n}\left|m_{ij}\right|\ (i=2,\cdots,n)$$

若 $\left|m_{ii}\right|>\boldsymbol{\Omega}_i(\boldsymbol{M})$ ($i=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{M}$ 是Nekrasov矩阵。文献[3]的结果为：记 $\boldsymbol{M}$ 的严格下三角部分为 $-\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{l}_{ij})$，对角部分记为 $\boldsymbol{D}$，则：

$$\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\leq \max_i \frac{\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{T})}{\left|m_{ii}\right|-\boldsymbol{\Omega}_i(\boldsymbol{M})}\tag{1}$$

收稿日期：2003 – 10 – 14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60372012)
作者简介：冉瑞生(1976 –)，男，博士生，主要从事大规模科学计算的数值计算方面的研究.

式中 $\boldsymbol{T}=(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{N}|$；而 $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{R}_1(|\boldsymbol{N}|)$ $\boldsymbol{P}_i(T)=\boldsymbol{R}_i(|N|)+\sum_{j=1}^{i-1}|\boldsymbol{l}_{ij}|\dfrac{\boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{T})}{|m_{jj}|}$，$(i=2,\cdots,n)$。在文献[5]中提出了一类Baily-crabtree对角占优矩阵，并讨论了其行列式的界估计。以 $\boldsymbol{C}_r$ 记这类对角占优矩阵，则：$\boldsymbol{C}_r=\{\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ ：$|m_{ii}|>\boldsymbol{r}_i\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|$，其中 $\boldsymbol{r}_i>0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\boldsymbol{r}_i}\leq 1\}$。

定义2[6] 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(C)$，如果对某 $\alpha\in[0,1]$ 有：

$$|m_{ii}|>R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

成立，称 $\boldsymbol{M}$ 为 α-严格对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{D}^{\alpha}$。

本文首先讨论了 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$ 时 $\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 模的上下界估计，继而在此基础上研究了在一定条件下当 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{D}^{\alpha}$ 时 $\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 模的界估计。

2 主要结果

引理[5] 设 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$，则 $\boldsymbol{M}$ 非奇。

定理 1 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{N}=(n_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，且 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$，则 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值 $\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 满足：

$$|\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})|\leq\max_i\frac{|n_{ii}|+r_i\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-r_i\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|}$$

证明 设 λ 是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的任意特征值，则 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})=0$，即 $\det(\boldsymbol{N}-\lambda\boldsymbol{M})=0$。如果对任意 i 有：

$$|n_{ii}-\lambda m_{ii}|>r_i\max_{j\neq i}|n_{ij}-\lambda m_{ij}|\tag{2}$$

式中 r_i 为 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$ 中的常数 r_i；则由引理得知 $\boldsymbol{N}-\lambda\boldsymbol{M}$ 非奇；即 λ 不是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值。进一步，若对任意 i 有：

$$|\lambda||m_{ii}|-|n_{ii}|>r_i(\max_{j\neq i}|n_{ij}|+|\lambda|\max_{j\neq i}|m_{ij}|)\tag{3}$$

式中 λ 不是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值。事实上式(3)的左边不大于式(2)的左边，而式(3)的右边 $r_i(\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}|+|\lambda|\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|)\geq r_i\max\limits_{j\neq i}(|n_{ij}|+|\lambda||m_{ij}|)\geq r_i\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}-\lambda m_{ij}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即当式(3)成立时式(2)也成立。这样如果 λ 是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值，必有–i，不妨设为 i_0，使得：

$$|\lambda||m_{i_0i_0}|-|n_{i_0i_0}|\leq r_{i_0}(\max_{j\neq i_0}|n_{i_0j}|+|\lambda|\max_{j\neq i_0}|m_{i_0j}|)$$

从而

$$|\lambda|\leq\frac{|n_{i_0i_0}|+r_{i_0}\max\limits_{j\neq i_0}|n_{i_0j}|}{|m_{i_0i_0}|-r_{i_0}\max\limits_{j\neq i_0}|m_{i_0j}|}\leq\max_i\frac{|n_{ii}|+r_i\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-r_i\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|}$$ 证毕

定理 2 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{N}=(n_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{M}$ 非奇，$r_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+r_i}\leq 1$，则：

$$|\lambda(M^{-1}N)|\geq\max_i\frac{|n_{ii}|+r_i\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-r_i\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|}$$

证明 证明同定理1。设有 λ 使得对任意 i 有：

$$|n_{ii}|-|\lambda||m_{ii}|>r_i(\max_{j\neq i}|n_{ij}|+|\lambda|\max_{j\neq i}|m_{ij}|)\tag{4}$$

成立。进而有 $|n_{ii}-\lambda m_{ii}|\geq|n_{ii}|-|\lambda||m_{ii}|>r_i(\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}|+|\lambda|\max\limits_{j\neq i}|m_{ij}|)\geq r_i\max\limits_{j\neq i}|n_{ij}-\lambda m_{ij}|$，由引理得知 λ 不是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值。若 λ 是 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值，由式(4)得证。 证毕

定理 3 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{N}=(n_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，对某 $\alpha\in[0,1]$ 有 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{D}^{\alpha}$，且 $\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}+S_i^{1-\alpha}}\le 1$，则 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值 $\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 满足：

$$\left|\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\right|\le\max_i\frac{|n_{ii}|+\left(S_i/R_i\right)^{1-\alpha}\max\limits_{j\ne i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}}$$

证明 在所给条件下，有 $\boldsymbol{S}_i\ne 0(i=1,2,\cdots,n)$。若某个 $S_{i_0}=0$，必有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}+S_i^{1-\alpha}}>1$。记 $r_i=\left(S_i/R_i\right)^{1-\alpha}$，显然 $\boldsymbol{r}_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且有：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+r_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^{1-\alpha}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}+S_i^{1-\alpha}}\le 1$$

由 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{D}^{\alpha}$，对任意$i$有：

$$|m_{ii}|>R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}=\frac{S_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}}R_i=r_i\ R_i=r_i\sum_{j\ne i}|m_{ij}|\ge r_i\max_{j\ne i}|m_{ij}|$$

这样 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$。于是由定理1有：

$$\left|\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\right|\le\max_i\frac{|n_{ii}|+r_i\max\limits_{j\ne i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-r_i\max\limits_{j\ne i}|m_{ij}|}\le\max_i\frac{|n_{ii}|+r_i\max\limits_{j\ne i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-r_i\sum\limits_{j\ne i}|m_{ij}|}=$$

$$\max_i\frac{|n_{ii}|+\left(S_i/R_i\right)^{1-\alpha}\max\limits_{j\ne i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}}$$

证毕

定理4 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{N}=(n_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{M}$ 非奇且 $\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}+S_i^{1-\alpha}}$，则 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值 $\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})$ 满足：

$$\left|\lambda(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\right|\ge\min_i\frac{|n_{ii}|-\left(S_i/R_i\right)^{1-\alpha}\max\limits_{i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|+R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}}$$

证明 由定理2的结论和定理3的证明过程可知结论成立。 证毕

3 数值例子

例1 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}3&2&2\\ \frac{1}{3}&2&0\\ 1&1&\frac{51}{10}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&\frac{9}{10}&\frac{9}{10}\\ 0&\frac{17}{10}&\frac{1}{10}\\ \frac{3}{5}&\frac{3}{10}&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M}$ 不是严格对角占优矩阵，不能用文献[1]中的方法估计。

又 $|\boldsymbol{m}_{11}|=3<\boldsymbol{\Omega}_1(\boldsymbol{M})=4$，$\boldsymbol{M}$ 不是Nekrasov矩阵，文献[3]的结果也不能应用。

但若取 $r_1=1$，$r_2=3$，$r_3=3$ 时，可以验证

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+r_i}\le 1\text{，且}|m_{ii}|>r_i\max_{j\ne i}|m_{ij}|(i=1,2,3)$$

即 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{C}_r$。由定理1可得 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\le 0.91$。

直接计算可得 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值为 $\lambda_1=0.299\ 6$，$\lambda_2=0.136\ 1$，$\lambda_3=0.844\ 1$，可见这里的估计是精确的。

例2 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0.1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1.8\end{pmatrix}，\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.2\\ 1 & 0.3 & 1\\ 0 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 不是严格对角占优矩阵，不能用文献[1]的结果。

可以验证 $\boldsymbol{M}$ 是Nekrasov矩阵，即满足文献[3]的条件，于是由估计式(1)可得

$$\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\leqslant 1.359。$$

用本文的定理3，易知 $R_1=0.1$，$R_2=R_3=2$，$S_1=2$，$S_2=1$，$S_3=1.1$。取 $\alpha=0.5$，则可以验证

$$|m_{ii}|>R_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}\ (i=1,2,3)，且\sum_{i=1}^{3}\frac{R_i^{1-\alpha}}{R_i^{1-\alpha}+S_i^{1-\alpha}}\leqslant 1。$$

于是由定理3有：

$$\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})\leqslant 0.630\,5$$

而直接计算可知 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0.233\,6$，$\lambda_3=0.474\,7$，可见这里的估计是精确的。

参 考 文 献

[1] 胡家赣. $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 特征值模的上下界估计[J]. 计算数学, 1986, 1: 41-46.
[2] 黄廷祝. 迭代阵特征值模界的估计[J]. 电子科技大学学报, 1994, 23(3): 328-332.
[3] 陈焯荣, 黎 稳. 迭代矩阵谱半径的上界估计[J]. 数学物理学报, 2001, 21(1): 8-13.
[4] Li Wen. On Nekrasov matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1998, 218: 87-96.
[5] Baily D W, Crabtree D W. Bounds for determinants[J]. Linear Algebra Appl, 1969, 2: 303-309.
[6] Marcus M, Minc H. A Survey of matrix theory and matrix inequalities[M]. Allyn and Boston, Boston, 1964.

编 辑 刘文珍

(上接第110页)

5 结 论

本文提出的基于粗糙集理论入侵检测方法，能从有限的正常调用序列样本集中发现反映数据属性之间关系的本质特征，更有效地逼近理想的分类模型，并且属性约简能得到最小分类检测规则集，它不需要全部的正常和异常的信息，在给出较少的正常和异常调用序列数据的情况下，才能使得基于粗糙集的入侵检测模型在先验知识不足的情况下，仍然有较好的检测率。

参 考 文 献

[1] Forrest S, Perrelason A S, Allen L, et al. Self_nonself discrimination in a computer[C]. In: Rushby J, Meadows C, eds. Proceedings of the 1994 IEEE Symposium on Research in Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 1994: 202-212.
[2] Ghosh A K, Michael C, Schatz M. A real-time intrusion system based on learning program behavior[A]. In: Debar H, Wu SF. Recent advances in intrusion detection (RAID 2000)[C]. Toulouse: Spinger-Verlag, 2000. 93-109.
[3] Lee W, Stolfo S J. A data mining framework for building intrusion detection model[C]. In: Proceedings of the 1999 IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 1999: 120-132.
[4] 刘 清. Rough集及Rough推理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

编 辑 孙晓丹