网络最大流Pareto扩充研究

张岗亭[1]，姜晓兵[2]，王书振[2]

(1. 西安文理学院计算机科学系　西安　710065;　2. 西安电子科技大学 经济管理学院　西安　710071)

【摘要】将网络容量定义为最大s-t流的流量，建立了带有时间和费用双重限制下的网络容量扩充问题模型。通过网络变换，将该问题转化为可利用成熟算法求解的线性最小费用流问题。研究了给定网络容量扩充目标要求下，求解所有关于时间和费用的Pareto优化解问题并提供了相应算法。研究内容不仅适用于各种情形的容量扩充问题，而且还可应用于网络规划。最后通过具体例子的求解，说明了算法的正确性和有效性。

关　键　词　网络流;　容量扩充;　Pareto优化解;　逆优化

中图分类号　TP393.2　　　文献标识码　A

Research on Network Max-flow Pareto Expansion Problem

ZHANG Gang-ting，JIANG Xiao-bing，WANG Shu-zhen

(1. Department of Computer Science, Xi’an University of Arts and Science　Xi’an　710065;

2. School of Economics & Management, Xidian University　Xi’an　710071)

Abstract　The network capacity is defined as the value of the maximum s-t flow, and a unified model is introduced for the network capacity expansion with the time and cost constraints. By the transformation of the underlying network, the network capacity is converted to a minimum cost flow problem instead. Also developed are the algorithm to find all pareto optimal solutions about time and cost with given expanded network max-flow. The model and algorithm are proven to be valid with an example, and they not only allow capturing various types of capacity expansion, but also are useful in network programming.

Key words　network flow;　capacity expansion;　Pareto optimal solution;　inverse optimization

网络扩充在国民经济中发挥着重要作用，道路改造、电网升级、机器更新都需要利用网络扩充的知识。网络扩充就是在现有网络的基础上，通过改造网络中部分或全部弧的容量，来提升网络的容量和性能。网络容量在不同的应用背景下有不同的定义。文献[1-2]把生成树中容量最小的弧的容量定义为生成树的容量，网络的容量用网络中所有生成树的容量的最大值来衡量；文献[3]则把生成树的容量定义为生成树的所有弧的容量之和，把网络的容量定义为所有生成树的容量的最大值；文献[4]把网络的容量定义为任意两节点间链的容量的最小值。但上述文献仅研究了带有投资费用限制的网络容量扩充情形，实际中的网络扩充不但受费用的限制，还经常受时间的约束。本文将单源单汇的流网络作为研究对象，将最大时间和费用s-t流的流量定义为网络容量，研究了时间、费用双重限制下的网络容量扩充。

网络扩充还是一个决策问题，在决策过程中，往往是先确定目标，使扩充后的网络容量达到某指标，即下文所称的目标容量，再在众多方案中选择最佳的时间和费用组合。因此，研究给定目标容量下的所有最优组合方案，找出关于时间和费用的Pareto优化解，求出时间和费用的临界值，向决策者提供充足的信息，显得尤为重要。

本文的研究基于网络容量扩充问题的数学定义，提出一种网络变换方法，解决给定时间和网络目标容量要求下的最小投资问题，并在该方法的基础上，给出给定目标容量下关于时间、费用的Pareto扩充算法，以实例说明算法的有效性。

1　求给定时间限制和网络目标容量要求的最小扩充费用

给定一个单源单汇的流网络$N=(N_s, N_t, V, A, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{T})$，式中$N_s$和$N_t$分别为源点和汇点；$V$和$A$分别

收稿日期：2003 – 06 – 04

作者简介：张岗亭(1970 –)，男，讲师，主要从事网络拓扑优化方面的研究.

为结点集和弧集；$U \in R^{|A|}$是一上界容量向量，向量分量$\boldsymbol{u}_{ij}$表示弧$(i，j)$的上界容量，其中$|A|$为集合A的元素个数；$\boldsymbol{W} \in R^{|A|}$是单位容量扩充费用向量，$\boldsymbol{W}$的分量$\boldsymbol{w}_{ij}$表示弧$(i，j)$的容量增加1个单位所需的费用；$\boldsymbol{T} \in R^{|A|}$是单位容量扩充时间向量，$\boldsymbol{T}$的分量$t_{ij}$表示弧$(i，j)$的容量增加1个单位所需的时间。设$\boldsymbol{x} \in R^{|A|}$为一流向量，其分量$\boldsymbol{x}_{ij}$表示弧$(i，j)$上的流量。网络容量定义为最大$s$-$t$流的流量。本文假设容量和流量均为整数，如果不满足要求，可以采用对所有数据放大$n\times 10$倍的方式变为整数。同样，如果不是单源单汇网络，也可以通过增加虚拟节点的方法变为单源单汇网络。

设网络扩充后达到给定目标容量时，求一组关于时间、费用的Pareto优化解为问题P_1；在时间限制和网络目标容量给定时，求扩充弧的容量使得满足目标容量所需投资最小为问题P_2。要想最终求解问题P_1，首先应求解问题P_2。如果记：

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_N(r_0)=\left\{ \boldsymbol{x} \middle| = \sum\limits_{j:(i,\ j)\in N} \boldsymbol{x}_{ij} - \sum\limits_{j:(j,\ i)\in N} \boldsymbol{x}_{ji} = \begin{cases} r_0,\ i=N_s \\ -r_0,\ i=N_t \\ 0,\ i\neq s,\ N_t \end{cases} \right\} \\ f_N(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{(i,\ j)\in N} \boldsymbol{w}_{ij} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{u}_{ij}) \end{cases} \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{X}_N(r_0)$表示网络N流量为r_0的可行流$\boldsymbol{x}$的集合；$(i，j)\in N$表示弧$(i，j)$属于网络N；$f_N(\boldsymbol{x})$表示网络流为$\boldsymbol{x}$时的总扩充费用；

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}\text{-}a)=\begin{cases} 0,\ \boldsymbol{x}\leq a, \\ \boldsymbol{x}-a,\ \boldsymbol{x}>a \end{cases}$$

则给定时间限制B_1和目标网络容量r_0,求解最小扩充费用的模型为：

$$(P_1)：\begin{array}{l} \min f_N(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{X}_N(r_0) \\ t_{ij}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{u}_{ij})\leq B_1 \quad (i,\ j)\in N \end{cases} \end{array} \tag{2}$$

由于式(2)的第二个约束条件存在阶梯函数，没有算法可直接利用。但通过将现有网络作适当变换，可以将该求解最小扩充费用问题转变为求解最小费用流问题，即记现有流网络$N=(N_s，N_t，V，A，\boldsymbol{U}，\boldsymbol{W}，\boldsymbol{T})$，构造一个二重流网络$\tilde{N}=(N_s，N_t，V，\tilde{A}，\tilde{\boldsymbol{U}}，\boldsymbol{C})$，式中$\boldsymbol{C}$为流量费用向量，$\boldsymbol{C}$的分量$\boldsymbol{c}_{ij}$表示在弧$(i，j)\in\tilde{A}$上通过单位流量的费用。对于每一条弧$(i，j)\in A$，$\tilde{A}$中有两条二重平行弧与之对应，一条是基本弧$(i^1，j^1)$，另一条是扩充弧$(i^2，j^2)$，它们的始点和终点仍为$i$和$j$。基本弧的容量保持不变，单位流量费用为0；扩充弧的容量为$[B_1/t_{ij}]$；单位流量费用为$\boldsymbol{w}_{ij}$；其中$[y]$表示不大于y的最大整数，即有$\tilde{u}_{i^1 j^1}=\boldsymbol{u}_{ij}$，$\boldsymbol{c}_{i^1 j^1}=0$，$\tilde{u}_{i^2 j^2}=[B_1/t_{ij}]$和$\boldsymbol{c}_{i^2 j^2}=\boldsymbol{w}_{ij}$。网络变换的图形表示见图1。该变换巧妙地将时间约束转变为扩充弧的容量，将扩充费用转变为流量费用，使原问题P_2等价于线性费用函数下的最小费用流问题P_3，即：

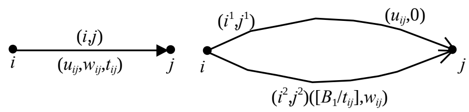

图1　弧(i, j)及其二重平行弧(i^1, j^1)和(i^2, j^2)

$$(P_3)：\begin{array}{l} \min \sum\limits_{(i,\ j)\in\tilde{N}} \boldsymbol{c}_{ij}\boldsymbol{x}_{ij} \\ \text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{X}_{\tilde{N}}(r_0) \\ 0\leq \boldsymbol{x}_{ij}\leq \tilde{\boldsymbol{u}}_{ij} \quad (i,\ j)\in\tilde{N} \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

变换首先考虑时间约束，在满足时间约束的前提下再进行容量扩充。因此，可以将在最大许可时间内可扩充的容量视为扩充弧的上界容量。在此基础上，解决最小费用流的优化问题，扩充弧的流量即是需要扩充的容量，其最优值不但表示网络$\tilde{N}$的最小流费用，而且表示在时间限制B_1下，网络容量扩充至r_0时的最小扩充费用。经过变换后的网络可以利用松弛算法或网络单纯形法求解。

2　给定网络目标容量求关于时间费用的Pareto优化解

在工程应用中，已知工程目标和时间限制，进行最小经费预算，即上文的已知时间和容量求最小费用问题是必不可少的工作，决策者希望从众多的备选方案中选优。本文将时间和费用约束均看作变量，在解

决给定网络最大流扩充目标的前提下，求解所有关于时间和费用的Pareto优化解，目的是求给定目标容量下的所有时间临界值和投资临界值，也就是求所有满足要求的时间-费用数据对，使数据对中任何一个数均为满足要求，使扩充后的网络容量达到预定目标的最小值。

设$h(\bar{\boldsymbol{U}})=\max\{\bar{\boldsymbol{u}}_i-\boldsymbol{u}|\bar{\boldsymbol{U}}\geq \boldsymbol{U}\}$，$f(\bar{\boldsymbol{U}})=W^T(\bar{\boldsymbol{U}}-\boldsymbol{U})$，即$h(\boldsymbol{U})$和$f(\boldsymbol{U})$分别为上界容量$\boldsymbol{U}$扩充至$\bar{\boldsymbol{U}}$时的扩充时间和扩充费用，则一个关于时间和费用的Pareto优化解是满足条件的一个有序对(b_1^*, b_2^*)，存在$\boldsymbol{U}^*(\geq \boldsymbol{U})$满足$h(\boldsymbol{U}^*)=b_1^*$，$f(\boldsymbol{U}^*)=b_2^*$，但不存在$\mathring{\boldsymbol{U}}(\geq \boldsymbol{U})$同时满足$f(\mathring{\boldsymbol{U}})<f(\boldsymbol{C}^*)$和$h(\mathring{\boldsymbol{U}})\leq h(\boldsymbol{C}^*)$，或同时满足$f(\mathring{\boldsymbol{U}})\leq f(\boldsymbol{C}^*)$和$h(\mathring{\boldsymbol{U}})<h(\boldsymbol{C}^*)$。记问题$P_2$的时间限制为$B_1$，网络目标容量为$r_0$时的最小扩充费用为$g(r_0, B_1)$，由于求解$P_2$时采用了时间约束放松方法，故不能肯定地说数据对$(B_1, g(r_0, B_1))$是网络目标容量为$r_0$下的一个关于时间和费用的Pareto优化解，因为完全有可能存在另一个时间期限B_1^* $(<B_1)$满足$g(r_0, B_1^*) = g(r_0, B_1)$。但如果$B_1$满足$\{\boldsymbol{x}|g(r_0, \boldsymbol{x})=g(r_0, B_1)\}$中的最小值，则它一定是Pareto优化解中的时间分量。因此，如果按照时间限制从小到大的排列方式来依次求解问题P_2，则在阶跃处的解一定是Pareto优化解。

下面给出网络目标容量为r_0时求全部Pareto优化解的算法。

设v^{0*}为现有流网络N的容量，$r_0(r_0>v^{0*})$为网络目标容量；记

$$t_{\min}=\min\{t_{ij}|t_{ij}\in T\},\quad t_{\max}=\max\{t_{ij}|t_{ij}\in T\},\quad (i, j)\in A,$$

则网络扩充所需要的时间t满足

$$t\in[t_l, t_u]=[t_{\min}(r_0-v^{0*}), t_{\max}(r_0-v^{0*})]$$

求全部Pareto优化解的步骤如下：

步骤 1 记$Ŧ=\{t_{ij}|\ t_{ij}=kt_{ij}, k\in N, t_{ij}\in T\}$，将$Ŧ$中位于区间$[t_l,t_u]$内的元素$t_{ij}$以升序排列，得到一个数列$S$，记为$t_1$，$t_2$，…，$t_k$。

步骤 2 求得s=1。

步骤 3 求出当 $B_1=t_s$时的最小扩充费用$g^*(t_s, r_0)$，并输出$(t_s, g^*(t_s, r_0))$。

步骤 4 若$s\neq k$，$s=s+1$；否则，结束。

步骤 5 求出当 $B_1=t_s$时的最小扩充费用$g^*(t_s, r_0)$。

步骤 6 若$g^*(t_s, v)=g^*(t_{s-1}, r_0)$，转向步骤4；否则，输出$(t_s, g^*(t_s, r_0))$，转向步骤4。

上述算法的思想是首先确定扩充时间所在的整数区间，然后析出区间内的每一个合理值，再分别调用前文的方法求解最小费用问题，得到所有的Pareto解。该算法在最坏情况下的复杂度为$O((t_u-t_l)O(T))$，其中，$O(T)$为求解问题P_2的算法时间复杂度。

3 计算示例

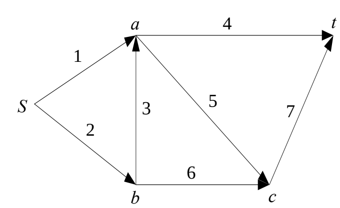

图2　流网络图

例：现有的流网络N如图2，要求扩充后网络的容量在区间[20，25]内，试给出扩充时所有的Pareto优化解？

解：现有流网络N的容量v^{0*}=11，当r_0=20时，$t_{\min}$=2，$t_{\max}$=7，$[t_l, t_u]$=[18，63]。S数列为18，20，21，22，24，25，26，27，28，30，32，33，34，35，36，38，39，40，42，44，45，46，48，49，50，51，52，54，55，56，57，58，60，62。利用上述算法，可得到当r_0=20时所有的Pareto解为(20，16)，(25，15)，(30，14)，(35，13)，(40，12)。同理可求得容量为21至25时的所有Pareto优化解(见图3)。

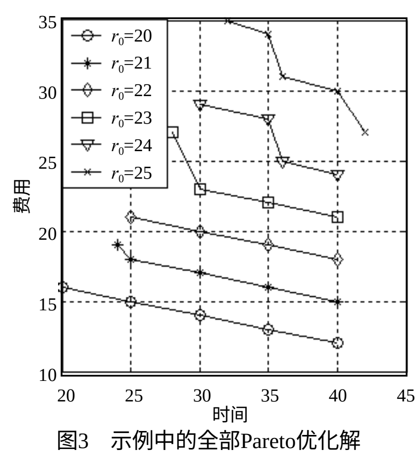

图3　示例中的全部Pareto优化解

从图3中的曲线可以看出，当决策者对工期要求不紧迫，但希望节约费用时，理想的方案有r_0为23时的(30，23)，r_0为24时的(36，25)，以及r_0为25时的(36，31)和(42，27)。因为在牺牲时间不多的情况下，较大地降低了费用。同样，如果决策者的首要需求是工期时，也可以方便地根据实际需要选择合适的点，做出经济合理的决策。

4 结 束 语

已知目标求过程属于逆优化的范畴，它正在获得越来越多的学者的关注。网络扩充在现实生活中有着极其广泛的应用，出于现实的考虑，本文将时间约束加入到网络扩充问题中。通过网络变换，解决了给定时间限制和扩充目标容量求最小扩充费用的问题，并给出了网络容量的时间、费用Pareto扩充算法。本文的算法具有最一般化的形式，如果将时间约束放松至无穷，则问题便转化为仅考虑费用限制的网络容量扩充问题。事实上，网络规划是网络扩充的一个特例，只不过网络规划的现有网络为空。本文的研究同样适用于网络规划，可为决策者提供充足的信息，做出正确合理的决策。

参 考 文 献

[1] Zhang J, Yang C. A class of bottleneck expansion problems[J]. Computer Operation Research , 2001, 28(6): 505-519.
[2] Burkard R E, Klinz B, Zhang J. Bottleneck capacity expansion problems with general budget constraints[J]. Rairo Operation Research, 2001, 35(1): 1-20.
[3] Berman O, Einav D, Handler G. The constrained bottleneck problem in networks[J]. Operation Research, 1990, 38(2): 178-181.
[4] 王洪国, 马绍汉. 关于无向网络容量扩充的问题[J]. 山东大学学报, 2000, 35(4): 418-4.

编 辑 熊思亮

(上接第80页)

6 MPLS，QoS与宽带VPN业务

实现基于IP的VPN具有效率高、可扩展性好、管理配置简单等特点，适合超大规模的VPN应用。随着MPLS技术的完善和成熟，将保证全程全网端到端的高服务质量(Quality of Service，QoS)的互连互通，可满足不断增长的Internet业务对骨干网络设备的需求，其电信级可靠性、线速转发性能、完善的Diffserv/QoS机制和丰富的业务处理能力，适合于Internet骨干网和城域骨干网(Metropolitan Area Network，MAN)的建设需要；它支持MPLS交换，具有高速、宽带、智能、可靠、组网灵活等特点，并支持IP业务的QoS需求，为网络提供IP业务、VPN业务、智能路由，并对未来的MPLS网络业务提供良好的支持，可通过划分VPN网络来保障专业行业网络的安全性。

目前MPLS VPN技术已不断成熟，发展与应用也十分迅猛。MPLS VPN技术必将构建一个多业务的IP网络，为用户提供具有QoS保障、安全可靠，高速灵活的业务。

参 考 文 献

[1] 吴 江, 赵惠玲. 下一代的IP骨干网络技术—多协议标签交换[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2001.
[2] 吴 伟. 下一代的IP网络技术保障—多协议标签交换[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

编 辑 熊思亮