

# 分数阶自相关和FrFT的LFM信号参数估计

王 璞, 杨建宇, 杜雨洺

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】**基于分数阶自相关和分数阶傅里叶变换的特点,提出了一种LFM信号检测与参数估计方法。相对分数阶傅里叶二维扫描法和匹配傅里叶变换,所提方法将检测与参数估计的二维搜索变为一维搜索,快速实现信号检测和参数估计,在分量LFM信号情况下借助“Clean”的方法来抑制强分量对弱分量的干扰。计算机仿真表明了该算法在低信噪比多分量LFM信号检测与参数估计中的有效性。

**关键词** 线性调频信号; 分数阶自相关; 分数阶傅里叶变换; 参数估计  
**中图分类号** TN957.51 **文献标识码** A

## Parameter Estimation of LFM Signal Using Fractional Autocorrelation and FrFT

WANG Pu, YANG Jian-yu, Du Yu-ming

(School of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, a fast method for parameters estimation of the multi-component linear frequency modulated (multi-LFM) signal is proposed. The proposed algorithm reduces two-dimensional searches, widely used in the time-frequency based method, FrFT and Chirp Fourier transform, into two one-dimensional searches. With utilizing the discrete FrFT along with Fast Fourier Transform (FFT) algorithm, the proposed method is a computationally fast alternative for LFM signal detection and parameters estimation. Analysis of the multi-LFM signal is performed using the Clean technique. Finally, computer simulations are provided to illustrate performances of the proposed algorithm.

**Key words** multi-LFM signal; fractional autocorrelation; FrFT; parameter estimation

线性调频(LFM)信号在雷达、声纳、通信和生物学等领域中有着广泛的应用,当前LFM信号参数估计方法主要通过二维目标函数,并结合二维搜索来估计信号参数,比如最大似然估计、基于时频分析的参数估计方法、分数阶傅里叶变换(FrFT)<sup>[1]</sup>、匹配傅里叶变换(DCFT)<sup>[2]</sup>等。由于构造二维目标函数和二维搜索需要较大的运算量,所以上述方法不适用于实时信号处理。为了减小运算量和实时处理,本文将提出一种分步参数估计新方法。

### 1 分数阶傅里叶变换

1980年, Namias首先从数学的角度给出了分数阶傅里叶变换(FrFT)的定义<sup>[3]</sup>, Almeida分析了它和WVD的关系,并将其解释为时频平面的旋转算子,这一特性决定了FrFT特别适合分析LFM信号。作为傅里叶变换的一种广义形式,信号的FrFT可以看成信号在时间轴上逆时针旋转角度 $\alpha$ 到 $u$ 轴上的表示。如果 $0 < |\alpha| < \pi$ ,  $x(t)$ 的 $\alpha$ 阶分数阶傅里叶变换定义为:

$$X_{\alpha}(u) = \{F^{\alpha}[x(t)]\}(u) = \int B_{\alpha}(u, t)x(t)dt \quad (1)$$

式中  $F^{\alpha}[\cdot]$ 为FrFT的算子符号;  $B_{\alpha}(u, t)$ 被称为分数阶傅里叶变换的核函数:

$$B_{\alpha}(u, t) = \frac{e^{-j\pi \operatorname{sign}((\sin \alpha)/4) + (j\alpha/2)}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} e^{j\pi(t^2 + u^2)\cot \alpha - j2\pi tu \csc \alpha} \quad (2)$$

收稿日期: 2005-04-30

作者简介: 王 璞(1981-), 男, 硕士生, 主要从事时频分析及其应用、信号检测与估计、统计信号处理以及稳健信号处理等方面的研究。

当  $\alpha = \pi/2$ , 分数阶傅里叶变换退化为傅里叶变换。采用 Ozaktas H M 等提出的基于 FFT 的快速算法可实现分数阶傅里叶变换的快速计算<sup>[4]</sup>, 该算法的计算结果与连续的 FrFT 的计算结果比较接近。计算时假定信号的时宽限制在  $[-T/2, T/2]$ , 带宽限制在  $[-F/2, F/2]$ : 首先, 用  $T/\sqrt{FT}$  的采样间隔对信号离散化, 使得信号坐标无量纲化; 然后, 用香农内插公式对信号进行 2 倍内插; 采用分解的方法将 FrFT 分解为卷积的形式, 从而利用 FFT 来计算信号的 FrFT。如果信号采样点数为  $N$ , 该算法的复杂度为  $O(N \lg N)$ 。

## 2 分数阶自相关与模糊函数

### 2.1 分数阶自相关

分数阶自相关源于分数阶傅里叶, 其定义为<sup>[5]</sup>:

$$R_\alpha(\rho) = e^{j\pi\rho^2 \cos\alpha \sin\alpha} \int x(t)x^*(t - \rho \cos\alpha) e^{-j2\pi\rho \sin\alpha} dt \quad (3)$$

式中  $\rho \in \mathfrak{R}$  表示延迟;  $\alpha$  表示在时频平面上从时间轴逆时针旋转到  $u$  轴的角度;  $R_\alpha(\rho)$  则描述了时频平面上与  $t$  轴  $\alpha$  角度的  $u$  域自相关。式(3)中可以看出, 时域自相关和频域自相关分别对应  $\alpha = 0$  和  $\alpha = \pi/2$  的分数阶自相关:

$$R_0(\rho) = \int x(t)x^*(t - \rho) dt \quad (4)$$

$$R_{\pi/2}(\rho) = \int |x(t)|^2 e^{-j2\pi\rho} dt = \int X(f)X^*(f - \rho) df \quad (5)$$

### 2.2 模糊函数与分数阶自相关

模糊函数  $AF_x(\tau, \nu)$  定义为:  $AF_x(\tau, \nu) = \int x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{-j\nu t} dt$ , 对于线性调频信号, 其模糊函数为:  $AF_x(\tau, \nu) = 2\pi\delta(\nu + \mu_0\tau)\exp(jf_0\tau)$ , 式中  $f_0$  和  $\mu_0$  分别为信号中心频率和调频斜率。

分数阶自相关与模糊函数关系由式(6)给出:

$$R_\alpha(\rho) = AF_x(\rho \cos\alpha, \rho \sin\alpha) = \int x_\alpha(r)x_\alpha^*(r - \rho) dr = (F^{-\pi/2} \{ |X_{\alpha+\pi/2}(u)|^2 \})(\rho) \quad (6)$$

式中  $F^{-\pi/2}$  表示傅里叶反变换;  $X_\alpha(u)$  表示信号的  $\alpha$  阶分数阶傅里叶变换结果。式(6)中可以看出, 模糊函数过模糊平面原点直线上的累积与信号的  $\alpha$  阶分数阶自相关相一致。当  $\alpha = 0, \pi/2$  时, 有  $AF_x(\tau, 0) = R_0(\tau)$  和  $AF_x(0, \nu) = R_{\pi/2}(\nu)$ ; 同时, 信号的  $\alpha$  阶分数阶自相关  $R_\alpha(\rho)$  可以由信号的分数阶傅里叶变换以及快速傅里叶反变换(IFFT)实现。

## 3 多分量 LFM 信号的检测与估计方法

含噪声的多分量 LFM 信号可表示为:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i e^{j2\pi(f_i t + (\mu_i t^2)/2)} + n(t) \quad -\Delta t/2 \leq t \leq \Delta t/2 \quad (7)$$

式中  $A_i$ 、 $f_i$ 、 $\mu_i$  为各信号分量的幅度、中心频率、调频斜率;  $n(t)$  为零均值、方差  $\sigma^2$  的高斯白噪声。

### 3.1 调频斜率估计

调频斜率可以利用分数阶自相关构造的检测统计量进行估计, 利用分数阶自相关和模糊函数的关系, 对信号各旋转角度分数阶自相关变换的幅度平方进行积分, 当  $\mu = \mu_i$  时, 信号通过分数阶自相关得到了积累, 达到极大值, 而噪声经过自相关积分积累后, 效果不显著, 则调频斜率检测器为:

$$L(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |AF_x(\tau, \mu\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |AF_x(\tau, \nu)|^2 \delta(\nu \cos\alpha - \tau \sin\alpha) d\nu d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |AF_x(\tau \cos\alpha, \tau \sin\alpha)|^2 d\tau \quad (8)$$

将式(6)代入式(8), 得:

$$L(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_\alpha(\rho)|^2 d\rho \quad (9)$$

由  $\alpha = \tan^{-1} \mu$ , 则检测统计量为:

$$L(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{\tan^{-1}(\mu)}(\rho)|^2 d\rho \quad (10)$$

所以只需计算式(6)和式(10), 将结果与预先设定的门限进行比较, 就可以实现多分量 LFM 信号检测, 并估计调频斜率。

### 3.2 信号幅度与中心频率估计

在3.1节估计出信号调频斜率的基础上, 可求出调频斜率所对应的分数阶傅里叶变换阶数 $\hat{\alpha}_i$ , 然后作相应阶数的分数阶傅里叶变换, 一维搜索最大值 $\max |X_{\hat{\alpha}_i}(u)|$ 和对应分数阶域坐标 $\hat{u}_i$ 。中心频率的估计值为:

$$\hat{f}_i = \hat{u}_i \csc \hat{\alpha}_i \quad (11)$$

信号幅度的估计值为:

$$\hat{A}_i = \max |X_{\hat{\alpha}_i}(u)| / (|\varepsilon_{\hat{\alpha}_i}| \Delta t) \quad (12)$$

式中  $\varepsilon_{\hat{\alpha}_i} = \sqrt{(1 - j \cot \hat{\alpha}_i) / 2\pi}$ 。

### 3.3 算法步骤

在多分量LFM信号环境下, 采用了Clean的方法来抑制信号强分量对弱分量的干扰。步骤如下:

(1) 计算检测统计量 $L(\mu)$ : 首先对 $x(t)$ 作 $\tan^{-1} \mu + (\pi/2)$ 阶FrFT, 得到其幅度平方, IFFT后得到 $\tan^{-1} \mu$ 阶分数阶自相关, 最后累积得到检测统计量 $L(\mu)$ ;

(2) 估计调频斜率: 设定判决门限 $\lambda$ , 通过一维搜索大于 $\lambda$ 的谱峰, 以谱峰对应 $\mu$ 值作为调频斜率估计值 $\hat{\mu}_i$ ; 若 $L(\mu)$ 无大于 $\lambda$ 的谱峰, 则结束算法。多级搜索 $\alpha$ 可更精确地估计 $\mu_i$ 。

(3) 估计信号幅度和中心频率: 作 $\tan^{-1} \hat{\mu}_i$ 阶FrFT, 求得最大值和对应的分数阶频率, 由式(11)和(12)得到 $\hat{f}_i$ 和 $\hat{A}_i$ ;

(4) 运用“Clean”方法, 令 $x(t) = x(t) - \sum_i \hat{A}_i e^{j2\pi(\hat{f}_i t + j\hat{\mu}_i t^2/2)}$ , 返回步骤(1)。

### 3.4 算法复杂度

设序列长度为 $N$ ,  $\alpha$ 离散个数为 $M$ , 信号个数为 $L$ 。为了减小算法复杂度, 多级搜索 $\alpha$ , 保证估计精度的同时,  $\alpha$ 离散个数 $M$ 也远小于 $N$ , 有 $L \ll M \ll N$ 。该算法的算法复杂度分析如下: FrFT的算法复杂度 $O(MN \lg N)$ , IFFT的算法复杂度 $O(MN \lg N)$ , 所以分数阶自相关的算法复杂度为 $O(2MN \lg N)$ , 式(10)的复杂度 $O(MN)$ 可忽略, 则基于分数阶自相关的调制斜率估计方法复杂度为 $O(2MN \lg N)$ 。由于 $L \ll M$ , 基于分数阶傅里叶的信号幅度与中心频率估计方法的算法复杂度 $O(LN \lg N)$ 相对可忽略, 所以该算法的总复杂度为 $O(2MN \lg N)$ 。对比RWT复杂度 $O(N^2 M)$ , 匹配傅里叶变换复杂度 $O(N^2 \lg N)$ 等, 在 $M \ll N$ 的情况下, 该方法的算法复杂度明显降低。

## 4 仿真分析

仿真 1 在 Gaussian 白噪声环境中, 本文所提方法的性能分析如图1~3所示。

信号模型如式(7)。设参数为:  $L=1$ ,  $A_1=1$ ,  $f_1=20$  Hz,  $\mu_1=50$  Hz/s, 采样点数512。通过100次蒙特卡洛实验, 得到不同信噪比下 $A_1$ 、 $f_1$ 和 $\mu_1$ 的均方根误差RMSE。这里,  $RMSE = \sqrt{(1/N \sum_{i=1}^N \|\hat{\xi}_i - \xi\|^2)}$ ,  $\xi$ 和 $\hat{\xi}_i$ 分别为参数实际值和第 $i$ 次的估计值。在图1中, 第1次搜索是以较粗采样间隔对 $\alpha$ 进行离散化, 第2次搜索是在第1次搜索的基础上再对 $\alpha$ 进行局部离散采样。 $\mu_r$ 和 $\mu_e$ 表示调频斜率真实值和估计值。

仿真1结果表明本文所提方法的估计精度较高。多次搜索可以提高估计效果, 并减小运算量。搜索次数和点数可由估计精度和运算时间确定。由于分数阶傅里叶对信号具有较强的聚集性, 调频斜率估计误差对信号幅度和中心频率估计影响较小。

仿真 2 在 Gaussian 白噪声环境中, 本文所提方法的多信号处理能力分析如图4~5所示。

信号模型如式(7)。设参数为:  $k=3$ ,  $A_{1,2,3}=1.2$ 、 $0.7$ 、 $0.2$ ,  $f_{1,2,3}=150$ 、 $90$ 、 $-20$  Hz,  $\mu_{1,2,3}=-70$ 、 $30$ 、 $50$  Hz/s, 分量信号1~3相对于 Gaussian 白噪声的信噪比分别为2、1、-12 dB, 信号长度为512点, 采样频率为512 Hz。

在图4中, 两个强分量可以准确地被检测, 但信号两个强分量对弱分量干扰较大, 使得信号弱分量不易被检测与参数估计。在图5中, 两个强分量被“Clean”后, 弱分量得到准确地表示, 有利于检测和参数估计。

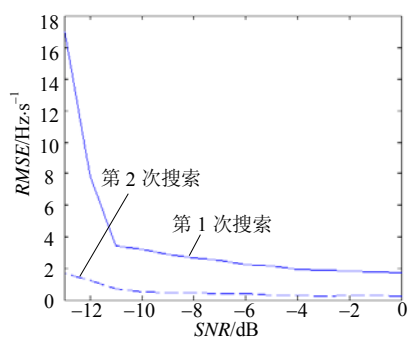


图1 调频斜率的均方根误差

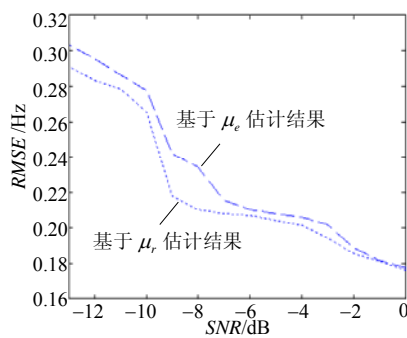


图2 中心频率的均方根误差

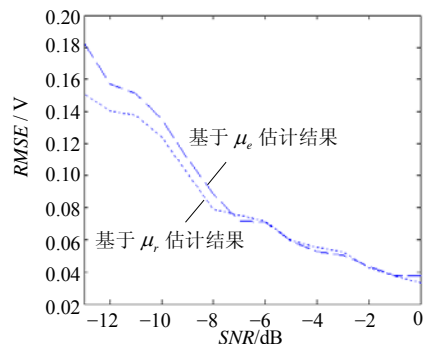


图3 信号幅度的均方根误差

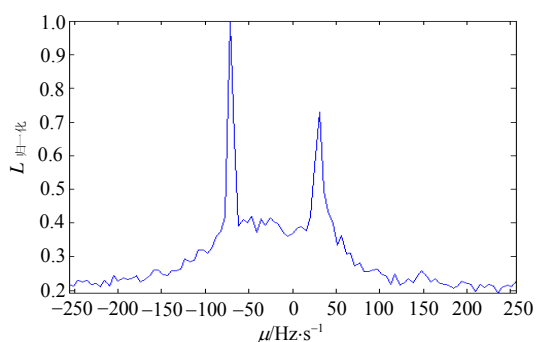


图4 第一次信号检测与调频斜率估计

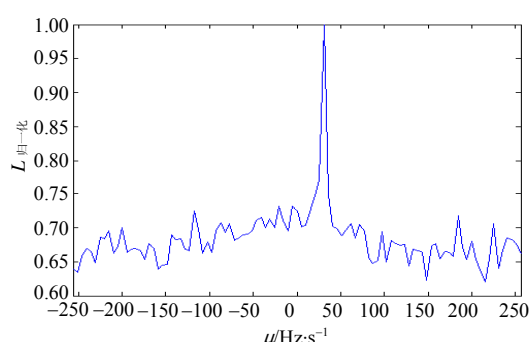


图5 Clean两个强分量后的信号检测与调频斜率估计

## 5 结论

在本文提出的方法中,首先运用了分数阶自相关进行调频斜率估计,然后利用得到的调频斜率并结合分数阶傅里叶变换估计了中心频率和信号幅度。对比其他方法,本文的方法利用两次构造一维目标函数和两次一维搜索减小了运算量,同时算法复杂度的分析也证实了这点。针对多分量LFM信号,本文采用的“Clean”方法抑制了强分量对弱分量的影响,仿真分析表明本文算法在低信噪比环境下十分有效。

## 参 考 文 献

- [1] 齐 林, 陶 然, 周思永, 等. 基于分数阶Fourier变换的多分量LFM信号的检测和参数估计[J]. 中国科学(E辑), 2003, 33(8): 749-759.
- [2] XIA X G. Discrete Chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation[J]. IEEE Transaction on Signal processing, 2000, 48(11): 3 122-3 133.
- [3] NAMIAS V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics[J]. Inst Appl Math, 1980, 25: 241-265.
- [4] OZAKTAS H M, ARIKAN O, KUTAY M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1996, 44(9): 2 141-2 150.
- [5] OKAY A, BOUDREAUX G F. Fractional convolution and correlation via operator methods and application to detection of linear FM signals[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2001, 49(5): 979-993.

编 辑 徐安玉