# 以概率$p$进入M/G/1排队系统的等待时间

李才良[1]，毛　勇[2]

(1. 成都电子机械高等专科学校　成都　610031; 2. 电子科技大学物理电子学院　成都　610054)

【摘要】针对输入率可变的休假排队系统是一种重要的排队论模型。讨论在假期内到达顾客以概率$p$进入M/G/1多重休假排队系统的逗留时间和等待时间，利用L-S变换和母函数法，得到了任意时刻到达顾客的逗留时间和等待时间的表达式以及系统平衡时顾客的逗留时间和等待时间。

**关　键　词**　逗留时间；　等待时间；　多重休假；　排对系统；　L-S变换

**中图分类号**　O226　　**文献标识码**　A

# Waiting Time Entering on M/G/1 Queue Systems with Probability *p* During Vacation

LI Cai-liang，Mao Yong

(1. Chengdu Electromechanical College　Chengdu　610031;　2. School of Physical Electronics, UEST of China　Chengdu　610054)

**Abstract**　Queue system with vacations is an important model of queue theory. In this article we study M/G/1 queue system during vacations the arriver enter system with probability *p*. Using the method of L-S transformation and generated function, we Get the expression formulaion of delaying time and the distributing generated function of waiting time.

**Key words**　delay time;　waiting time;　multiple vacations;　queuing system;　L-S transform

## 1　模型建立

近年来，国内外对休假排对系统进行了广泛的研究。文献[1-2]讨论了服务台失效后可更新或修理的排队模型；文献[3]考虑了当系统空时第一个到达的顾客服务时间不同于其他顾客的情形；文献[4]考虑了当顾客到达空闲系统时，系统不能马上开始服务，而需要一段“冷启动时间”的情形；文献[5-7]研究了延迟休假的情形；文献[8]研究了成批到达的情况；文献[9-11]讨论了N策略的情形。但一直以来，没有出现关于输入率可变的M/G/1排队系统讨论的文献，本文在上述文献的基础上，研究输入率可变的M/G/1休假排队系统的等待时间与逗留时间。

考虑一个M/G/1排队系统，在该系统中，设顾客到达是参数为$\lambda$的最简单流，顾客到达的时间间隔相互独立同分布，各顾客的服务时间$Y_1$，$Y_2$，$\cdots$之间独立同分布且：$P\{Y_i \leqslant x\} = B(x)$，$\dfrac{1}{\mu} = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}B(x)$，$\tilde{b}(s)$为L-S变换，并且与输入之间相互独立。当服务台服务完一个顾客，若发现系统中没有顾客时，服务台开始休假。当休假结束时，若发现系统中有顾客等待，则立即开始服务，一直工作到另一次休假，若休假结束时无顾客到达，则进行另一次休假。休假长度$V$为一随机变量且$V(t) = P\{V \leqslant t\}$，$EV = \theta$，$Var(V) = \sigma_v^2$，$\tilde{v}(s)$为L-S变换，进一步设$t$=0时刻系统中无顾客时，服务员不去进行休假，而是等待第一个顾客的到达，当第一个顾客进入系统，则立即开始服务。并且设当服务台处于休假期内时，到达的顾客以概$p(0<p<1)$进入系统进行等待，以$1-p$的概率离开而不进入系统。一个完整的休假过程$V_G$包括多次休假，即$V_G = V_1 + V_2 + \cdots + V_J$，$J$是一随机变量，它不仅与$V(t)$有关，而且依赖于到达过程，令$T_1$表示假期内到达的第一位顾客的时刻，则有：

收稿日期：2003 – 06 – 05
作者简介：李才良(1963 –)，男，硕士，副教授，主要从事排队论、系统可靠性理论及应用等方面的应用.

$$c_k = P\{J=k\} = P\{V_1+\cdots+V_{k-1} < T_1 \leqslant V_1+\cdots+V_k\} = \int_0^\infty [V^{(k-1)}(t) - V^{(k)}(t)]\lambda p \mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathrm{d}t$$

令 $D_n(t)$ 表示第 $n$ 个顾客在系统中的逗留时间，令 $R_n(t)=P\{D_n<t\}$，$\tilde{\gamma}_n(s)=E\,\mathrm{e}^{-sD_n}$，易得：

$$D_{n+1}=\begin{cases}(D_n-T_{n+1})^+ + S, & 若(D_n-T_{n+1})^+>0\\ \Omega_{n+1}+S, & 若(D_n-T_{n+1})^+=0\end{cases} \tag{1}$$

式中 $\Omega_{n+1}$ 为第一个在休假期内到达顾客的等待时间；$S$为第一个顾客的服务时间；其分布函数为 $B(t)$，由于在休假期内到达顾客数服从参数 $\lambda p$ 泊松流，所以 $\Omega_{n+1}$ 与 $n$ 无关，令 $\Omega(t)=P\{\Omega_{n+1}\leqslant t$，$\tilde{w}(s)=E\{\mathrm{e}^{-s\Omega_{n+1}}\}$。

**引理 1** 令 $\xi$、$T$ 为非负相互独立的随机变量，并且有 $P\{T\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $(t\geqslant 0)$，则：

$$E(\mathrm{e}^{-s(\xi-T)^+})=\begin{cases}\dfrac{\lambda E(\mathrm{e}^{-s\xi})-sE(\mathrm{e}^{-s\xi})}{\lambda-s} & 若\lambda\neq s\\ \lambda E(\mathrm{e}^{-\lambda\xi}) & 若\lambda=s\end{cases} \tag{2}$$

并且有 $P\{(\xi-T)^+=0\}=E\,\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$

**引理 2** 对标准M/G/1排队系统，令 $k_j(t)=P\{k\leqslant t$，在忙期中服务了$j$个顾客$\}$，若 $\Re e(s)\geqslant 0$，$|u|<1$，则：$\sum\limits_{j=1}^{\infty}k_j(s)u^j=\gamma(s,u)$，其中 $\gamma(s,u)$ 为方程 $z=u\tilde{b}(s+\lambda(1-z))$ 在单位圆 $|z|<1$ 内的唯一解 。

## 2 主要结论

**定理 1** 设第一个顾客的等待时间为 $w(t)$，其L-S变换为 $\tilde{w}(s)$，则对于 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，有：

$$\tilde{w}(s)=\frac{\lambda p}{\lambda p-s}\frac{\tilde{v}(s)-\tilde{v}(\lambda p)}{1-\tilde{v}(\lambda p)} \tag{3}$$

证明 由于休假期内到达是参数为 $\lambda p$ 的泊松流，休假期内第一个顾客是在该期内最后一次休假中到达，其等待时间为最后一次休假的剩余时间，与前 $k-1$ 次休假无关。

$$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{V_1+\cdots+V_{k-1}<T_{n+1}\leqslant V_1+\cdots+V_{k-1}+V_k, V_1+\cdots+V_{k-1}+V_k-T_{n+1}\leqslant t\}=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}c_kP\{V_1-T_{n+1}<t\,|\,V_1>T_{n+1}\} \tag{4}$$

因为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}P\{V_1-T_{n+1}<t\,|\,V_1>T_{n+1}\}=\frac{1}{1-\tilde{v}(\lambda p)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\{\int_0^\infty\int_x^{x+t}\mathrm{d}V(u)\lambda p\,\mathrm{e}^{-\lambda px}\,\mathrm{d}x\}=$$
$$\frac{1}{1-\tilde{v}(\lambda p)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\int_t^\infty \lambda p\mathrm{e}^{-\lambda p(u-t)}\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}t=$$
$$\frac{\lambda p}{\lambda p-s}\frac{\tilde{v}(s)-\tilde{v}(\lambda p)}{1-\tilde{v}(\lambda p)} \tag{5}$$

把式(4)两边作L-S变换，再把式(5)代入即得。

**定理 2** 对于 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，$|u|<1$，$\tilde{\gamma}_n(s)=E\,\mathrm{e}^{-sD_n}$ 的母函数分布为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n=\frac{(\lambda-s)u\tilde{\gamma}_1(s)}{\lambda-s-u\lambda\tilde{b}(s)}-\frac{\lambda u^2\tilde{b}(s)\tilde{\gamma}_1(\lambda(1-g(u)))}{[\lambda-s-u\tilde{b}(s)][1-u\tilde{b}(\lambda(1-g(u)))\tilde{w}_1(\lambda(1-g(u)))]}+$$
$$\frac{(\lambda-s)u^2\tilde{\gamma}_1(\lambda p(1-g_1(u)))\tilde{b}(s)\tilde{w}(s)}{[\lambda-s-u\tilde{b}(s)][1-u\tilde{b}(\lambda p(1-g_1(u)))\tilde{w}(\lambda p(1-g_1(u))}} \tag{6}$$

式中 $\tilde{w}(s)$ 由式(3)给出，$g(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}\mu^k}{k!}\displaystyle\int_0^\infty x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}B^{(k)}(x)$，$g_1(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda p)^{k-1}u^k}{k!}\displaystyle\int_0^\infty x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\,\mathrm{d}B^{(k)}(x)$

$$\tilde{w}_1(s)=\frac{\lambda}{\lambda-s}\frac{\tilde{v}(s)-\tilde{v}(\lambda)}{1-\tilde{v}(\lambda)}$$

证明 由式(1)以及 $(D_n-T_{n+1})^+$ 与$S$的独立性可得：

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(s)=P\{(D_n-T_{n+1})^+>0\}E\{\mathrm{e}^{-s(D_n-T_{n+1})^+}\mid(D_n-T_{n+1})^+>0\}\,E\,\mathrm{e}^{-sS}+ P\{(D_n-T_{n+1})^+=0\}E\,(\mathrm{e}^{-s\Omega})\,E(\mathrm{e}^{-sS}) \tag{7}$$

式中　若 $(D_n-T_{n+1})^+=0$，此时系统处于休假期，$T_{n+1}$ 为参数 $\lambda p$ 的指数分布，若 $(D_n-T_{n+1})^+>0$，系统处于忙期，$T_{n+1}$ 为参数 $\lambda$ 的指数分布。由引理2，当 $s\neq\lambda$ 时，有：

$$E\{\mathrm{e}^{-s(D_n-T_{n+1})^+}\mid(D_n-T_{n+1})^+>0\}=\frac{1}{1-\tilde{\gamma}_n(\lambda)}\left[\frac{\lambda\tilde{\gamma}_n(s)-s\tilde{\gamma}_n(\lambda)}{\lambda-s}-\tilde{\gamma}_n(\lambda)\right]$$

代入式(7)，即得：

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(s)=\frac{\lambda\tilde{b}(s)(\tilde{\gamma}_n(s)-\tilde{\gamma}_n(s))}{\lambda-s}+\tilde{\gamma}_n(\lambda p)\tilde{b}(s)\tilde{w}(s) \tag{8}$$

把式(8)两边同乘以 $u^n$ 再相加得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n=\frac{(\lambda-s)u\tilde{\gamma}_1(s)-u\lambda\tilde{b}(s)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda)u^n+(\lambda-s)u\tilde{b}(s)\tilde{w}(s)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda p)u^n}{\lambda-s-u\lambda\tilde{b}(s)} \tag{9}$$

式中　当 $p=1$ 时，系统即为输入为泊松流，参数为 $\lambda$ 的一般M/G/1休假排队系统，式(9)可化为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n=\frac{(\lambda-s)u\tilde{\gamma}_1(s)-[u\lambda\tilde{b}(s)-(\lambda-s)u\tilde{b}(s)\tilde{w}(s)]\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda)u^n}{\lambda-s-u\lambda\tilde{b}(s)}$$

式中　当 $|u|<1$ 时，由Takacs Lemma上式右端分母有唯一的零点，此时 $s=\lambda(1-g(u))$。则有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda)u^n=\frac{u\tilde{\gamma}_1(\lambda(1-g(u)))}{1-u\tilde{b}(\lambda(1-g(u)))\tilde{w}_1(\lambda(1-g(u)))} \tag{10}$$

若输入参数是 $\lambda p$ 的泊松流，同理得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda p)u^n=\frac{u\tilde{\gamma}_1(\lambda p(1-g_1(u)))}{1-u\tilde{b}(\lambda p(1-g_1(u)))\tilde{w}(\lambda p(1-g_1(u)))} \tag{11}$$

把式(10)、(11)代入式(9)即得结论。

利用Abel′s定理以及 $\eta_G$ 与 $\Omega$ 的相互独立性可得。

**定理** 3　若 $\rho<1$，由于 $\tilde{\gamma}(s)$ 与初始逗留时间 $R_1(t)$ 相互独立，有：

$$\tilde{\gamma}(s)=\frac{(1-\tilde{v}(\lambda))(\mu-\lambda)\theta}{\mu\lambda}\cdot\frac{\lambda\tilde{b}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{b}(s)}-\frac{(1-\tilde{v}(\lambda p))(\mu-\lambda p)\theta}{\mu\lambda p}\cdot\frac{(\lambda-s)\tilde{b}(s)\tilde{w}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{b}(s)} \tag{12}$$

证明　由Abel′s定理，有 $\tilde{\gamma}(s)=\lim_{u\uparrow1}(1-u)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n$，由Takacs lemma可得 $\lim_{u\uparrow1}g(u)=1$，$\lim_{u\uparrow1}g'(u)=(1-\rho)^{-1}$，把式(6)代入，求极限即可得式(12)。

证毕

令 $H_n$ 表示第 $n$ 个顾客的等待时间，$H_n(t)$ 为其分布函数，$\tilde{H}_n(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}H_n(t)$ 为 $H_n(t)$ 的L-S变换。

**定理** 4　对 $\mathrm{Re}(s)\geqslant0$，$|u|<1$ 时，$\tilde{H}_n(s)$ 的母函数分布为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{H}_n(s)u^n=\tilde{H}_1(s)u+\frac{\lambda u}{\lambda-s}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n-\frac{\lambda u^2\tilde{\gamma}_1(\lambda(1-g(u)))}{(\lambda-s)[u-\tilde{b}(\lambda(1-g(u)))\tilde{w}_1(\lambda(1-g(u)))]}+ \frac{u^2\tilde{\gamma}_1(\lambda p(1-g(u)))\tilde{w}(s)}{u-\tilde{b}(\lambda p(1-g_1(u)))\tilde{w}(\lambda p(1-g_1(u)))} \tag{13}$$

式中　$\tilde{w}(s)$；$g(u)$；$g_1(u)$；$\tilde{w}_1(s)$ 与定理2中的相同。

证明　由逗留时间可知 $H_{n+1}=\begin{cases}(D_n+T_{n+1})^+ & 若(D_n+T_{n+1})^+>0\\ \Omega_n & 若(D_n+T_{n+1})^+=0\end{cases}$ 由引理1可得：

$$\tilde{H}_{n+1}(s)=\frac{\lambda(\tilde{\gamma}_n(s)-\tilde{\gamma}_n(\lambda))}{\lambda-s}+\tilde{\gamma}_n(\lambda p)\tilde{w}(s) \tag{14}$$

对式(14)取母函数得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{H}_n(s)u^n-\tilde{H}_1(s)u=\frac{\lambda u}{\lambda-s}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n-\frac{\lambda u}{\lambda-s}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda)u^n+\tilde{w}(s)u\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(\lambda p)u^n \tag{15}$$

把式(10)、(11)代入式(15)即可得式(13)。

对于平稳等待时间$H$，可得如下定理。

**定理5** 若$\rho<1$，对于$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$有：

$$\tilde{H}(s)=\frac{(1-\tilde{v}(\lambda))(\mu-\lambda)\theta}{\mu(s-\lambda+\lambda\tilde{b}(s))}-\frac{(1-\tilde{v}(\lambda p))(\mu-\lambda p)\theta}{\mu\lambda p}\cdot\frac{(\lambda-s)\tilde{w}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{b}(s)} \tag{16}$$

证明 由于$\tilde{H}_n(s)$的极限分布存在，利用Abel's定理以及定理3有：

$$\tilde{H}(s)=\lim_{u\uparrow 1}(1-u)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{H}_n(s)u^n=\lim_{u\uparrow 1}\frac{\lambda u}{\lambda-s}(1-u)\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_n(s)u^n-\lim_{u\uparrow 1}(1-u)\frac{\lambda u^2\tilde{\gamma}_1(\lambda(1-g(u)))}{(\lambda-s)[u-\tilde{b}(\lambda(1-g(u)))\tilde{w}_1(\lambda(1-g(u)))]}+$$
$$\lim_{u\uparrow 1}\frac{(1-u)u^2\tilde{\gamma}_1(\lambda p(1-g(u)))\tilde{w}(s)}{u-\tilde{b}(\lambda p(1-g_1(u)))\tilde{w}(\lambda p(1-g_1(u)))}=\frac{\lambda}{\lambda-s}\tilde{\gamma}(s)+\frac{\lambda}{\lambda-s}\frac{(1-\tilde{v}(\lambda))(\mu-\lambda)\theta}{\mu\lambda}+$$
$$\frac{(1-\tilde{v}(\lambda p))(\mu-\lambda p)\theta}{\mu\lambda p}\frac{\tilde{w}(s)}{s-\lambda+\lambda\tilde{b}(s)} \tag{17}$$

把式(12)代入式(17)即得式(16)。 证毕

## 3 结 束 语

本文讨论的是到达率可变的排队系统，它是M/G/1休假排队系统的更一般的模型，实用范围更为广泛，当$p=1$时，本文所得的结果与文献[11]中M/G/1休假排队系统的结果相同。

## 参 考 文 献


[1] Avi-Itzhak B, Naor P. Some queuing process with service station subject to breakdown[J]. Opns. Res., 1963, 11(3): 302-320.
[2] 曹晋华, 程 侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986: 188-212.
[3] Miller W. An Introduction to Probability Theory and its Application(2nd Edition)[M]. New York: John Wiley & Sons, 1957.
[4] Levy H, Kleinrock L. A queue with starter and queue with vacation: delay Analysis by decomposition[J]. Opns. Res, 1986, 34(3): 426-436.
[5] Tang Yinghui, Tang Xiaowo. An M/G/1 queuing system with delay server vacations[J]. J. of Sys. Sci. &Sys. Eng., 1998, 7(1): 29-36.
[6] Tang Yinghui. The Queue-length distribution For $M^x$/G/1 queue with single server vacation [J]. Acta Math. Scientia, 2000, 20(3): 397-408.
[7] Tang Y H, Tang X W. The queue length distribution for M/G/1 queue with delay single server vacation[J]. J. of Sys. Sci. &Sys. Eng., 2000, 9(2): 171-178.
[8] Shi D H. The transient solution of the repairable queuing system M/G/1(M/H/1)[J]. Control Theory and Applications, 1994, 11(6): 681-688.
[9] Hoo W, Leeet AL. Analysis of the M/G/1 queue with N-policy and multiple vacation[J]. J. Appl. Prob., 1994, 11(6): 476-496.
[10] 夏茂辉, 田乃硕. 同步N−策略多重休假M/M/C排队[J]. 运筹学学报, 1997, 1(2): 86-94.
[11] Tian Naishou, Zhang Daqing. M/G/1 queue with contrallable vacations and optimization of vacation policy[J]. Acta Mathmaticae Applicatae Sinica., 1991, 7(1): 363-373.


编 辑 刘文珍