

Logistic映射的有限字长研究

张勇, 陈滨

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

【摘要】借助计算机对混沌序列进行数值分析必须考虑计算机的存储字长有限这个条件。针对Logistic映射,研究了计算机字长对其混沌特性的影响,由于计算机的字长效应,混沌序列经过短暂的过渡态后演化为周期序列,使用小数据量法计算了处于过渡态和周期态的有限字长混沌序列的最大Lyapunov指数。通过数值计算结果表明:有限字长混沌序列的周期态和过渡态都具有正的最大Lyapunov指数,且小数据量法对有限字长效应是鲁棒的。最后,给出了一个加长有限字长混沌序列演化周期和过渡期的耦合方法。

关键词 Logistic映射; 有限字长; 最大Lyapunov指数; 加大周期
中图分类号 TN911.2; O415.5 文献标识码 A

Finite Word Length Study of Logistic Map

ZHANG Yong, CHEN Bin

(School of Electronic Engineering, Univ. of Elec. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054)

Abstract To analyse the chaotic time sequences by computer should consider the finite word length of the computer. As to the logistic map, this paper studies the effect of finite word length to its chaotic characters. Due to the finite word length of computer, the chaotic sequences will turn into periodic ones after short interim. The maximum Lyapunov exponents are calculated by the small data sets method. The results show that both periodic and transitional chaotic sequences have positive maximum Lyapunov exponent, and the small data sets method is robust to the finite word length of the computer. In the end, a coupled method to improve the period and interim length of chaotic sequences is given.

Key words Logistic map; finite word length; maximum Lyapunov exponent; expanding period length

混沌作为非线性科学的一个重要研究分支,受到学术界的普遍重视,特别是近些年来其理论和应用都有较大的发展^[1]。但是,有限字长条件下的混沌研究还不多见,因此大量关于混沌的理论研究和应用往往都无法在实践中得到应用。借助于计算机对混沌信号进行分析,必须考虑计算机的有限存储字长这个条件。在使用有限字长表示混沌的状态情况下,混沌序列不可避免地演化为一个周期序列。直观地讲,因为有限字长表示的有理数毕竟是有限可数个的,一个字长为 N 位的计算机,表示的最小分辨能力是 2^{-N} ,能表示的数值范围最大限为 2^N ,由于混沌的决定性,最多经过 2^N 次迭代,混沌序列必将进入周期态。传统的观点是混沌序列具有正的最大Lyapunov指数,而周期序列的最大Lyapunov指数为0,按这种观点,有限字长条件下的混沌序列的最大Lyapunov指数应为0,事实上并非如此。本文针对Logistic映射,通过大量费时的数值分析,对有限字长条件下的混沌序列的过渡期、周期及最大Lyapunov指数分别进行了研究。

1 Logistic映射的有限字长周期性效应

Logistic映射的形式为:

$$x_{i+1} = ux_i(1 - x_i) \quad (1)$$

式中 u 为参数,当满足 $3.57 \dots < u < 4$ 时,式(1)具有混沌特性。本文编写了求有限字长条件下的Logistic映射的过渡期及周期长度的程序,程序原则上可以适用于无穷长字长下的求解。但字长越长,耗时就越大,所以仅给出了字长为4~32位的Logistic映射演化的过渡期和周期长度。这些结果已经具有很强的代表性了。

收稿日期: 2004-02-26

基金项目: 总装备部武器装备预研基金资助项目

作者简介: 张勇(1975-),男,博士生,主要从事混沌信号处理方面的研究。

采用式(1)的形式,取 $u = 4$, 初值 x_0 分别取为0.1、0.2、0.3和0.4, 其计算结果分别如图1~4所示。图中表示过渡期和周期长度(L)的纵轴使用对数坐标, 横轴为字长 d , 图中的“□”对应周期态, “○”对应过渡态。

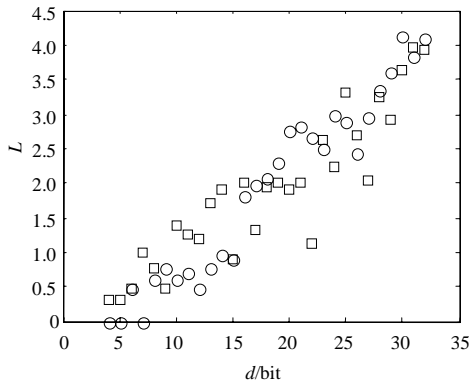


图1 初值为0.1时的情况

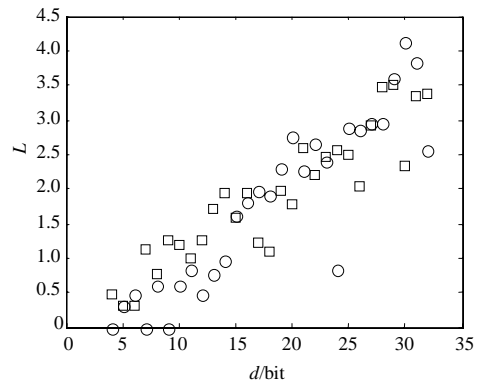


图2 初值为0.2时的情况

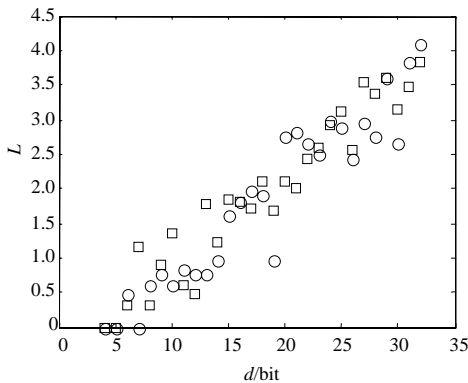


图3 初值为0.3时的情况

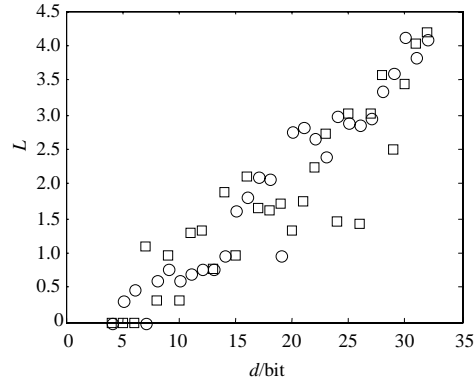


图4 初值为0.4时的情况

对于相同的字长和不同的初值, 可以导致相同的周期, 如当字长分别为16、17和25位等等, x_0 取0.1和0.2时可以得到相同的周期, 分别为63、91和771等等。但是, 这些相同周期的序列一般不是由相同的数值组成的, 也就是说, 字长固定情况下, Logistic映射可能嵌入了很多同周期的不同轨道。而且, 需要说明的是, 这种因有限字长而形成的周期轨道与嵌入在吸引子中的周期轨道有着本质的区别。

从图1~4可以清楚地看出, Logistic映射在有限字长情况下, 其进入到周期态前的过渡期长度与周期长度与字长有一种近似的关系, 即过渡期或周期长度的对数值与字长存在不严格的近似的线性关系。这说明了字长的增加可以导致过渡期和周期长度呈指数率增加, 可以反过来解释随着字长加长计算时间剧增的原因。

2 Logistic映射的有限字长最大Lyapunov指数

以上通过数值方法分析了Logistic映射在有限字长情况下的演化情况, 即存在过渡期和随后的周期, 这样就会产生一个问题: 是过渡态还是周期态最能反映真实Logistic映射的混沌特性。直观的想法更倾向于认为是过渡态, 因为感觉到过渡态是在混沌态中演化的, 事实上周期态也是可以的。这种由有限字长而生成的Logistic周期序列, 也具有局部发散、演化折叠的效应, 即具有混沌的基本特性。

本文使用了文献[2]的方法, 使用初值为0.1、0.2、0.3和0.4及字长为16~32的开始演化时的前3 000个点及进入周期态后的3 000个点分别计算了最大Lyapunov指数, 式(1)的最大Lyapunov指数真实值为0.693^[2], 这些结果分别如图5~8所示。图5~8中纵坐标代表最大Lyapunov指数值, 用 E 表示; 横坐标代表字长, 用 d 表示; 图中的“□”对应周期态, “○”对应过渡态, 虚线对应真实值。文献[1]提出的方法具有很多情况下的

鲁棒性^[1]，从下面的结果可以看出，这个方法也对有限字长具有很好的鲁棒性，是对文献[2]方法性能的一个重要补充。

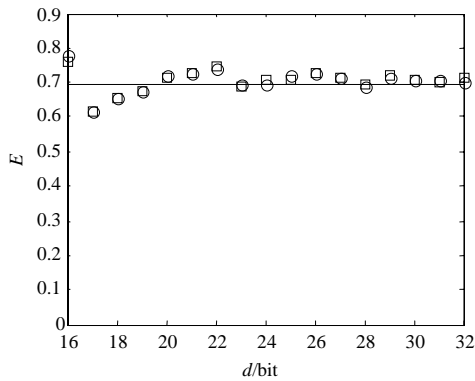


图5 初值为0.1时的情况

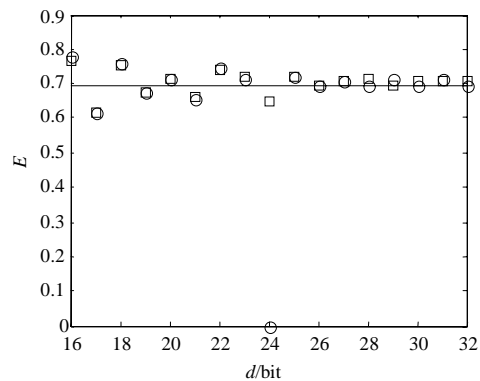


图6 初值为0.2时的情况

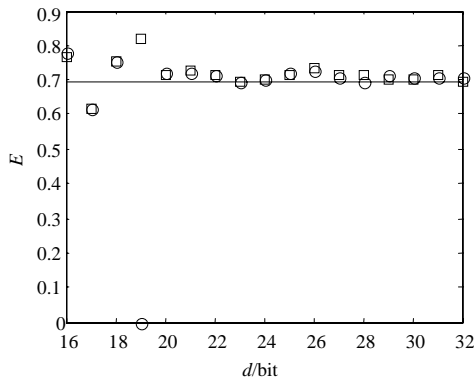


图7 初值为0.3时的情况

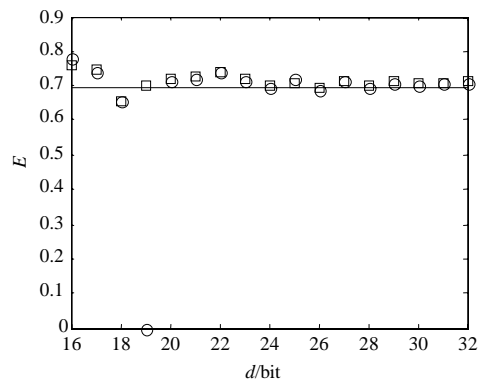


图8 初值为0.4时的情况

从图5~8中可以看出，随着字长的加长，无论是包括过渡期的序列还是进入周期态后的序列，计算得到的最大Lyapunov指数向真值靠拢。而且，包括过渡期的序列与周期态的序列计算的最大Lyapunov指数近似相同。对照图1~图4，可以明白图5~8中出现偏离真值较远的点，往往是周期态过短造成的。例如图7中的第19个点，从图3中可以查到其过渡期长度为48，周期长度为9，这个点产生了图5~8中的最大误差，约为17.94%。

对于序列而言，人们认定当其最大Lyapunov指数为正时，该序列必为混沌序列。从上面的研究可见，因有限字长效应由Logistic映射产生的周期序列，具有正的最大Lyapunov指数，这说明，原来的观点需要修正，混沌映射产生的有限字长周期序列具有正的最大Lyapunov指数。

3 加大Logistic映射的有限字长周期方法

由于有限字长效应，Logistic映射最终必将进入周期态，但是具有长的周期往往是所期望的。文献[3]给出了一种加大周期长度的方法，在此基础上提出了改进。文献[3]提出使用多级混沌映射级联的方法，但只考虑了单向驱动，这里提出了双向耦合的改进，方案如图9所示。图中的粗线代表了改进的地方。选取 $u_1=3.92$ ， $u_2=4.0$ ，初值从0.3至0.4，步长为0.01，对改进前后系统的过渡期和周期长度进行了计算，结果如表1所示。

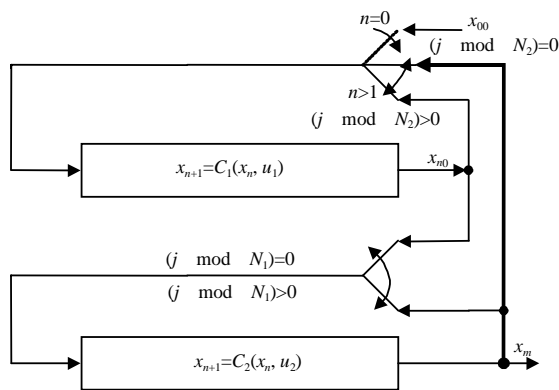


图9 加长周期的方法

正弦信号频率为25 MHz, 信号固有偏置为1/200信号最大幅度, 引入信噪比为10 dB的高斯白噪声。线性调频信号中频25 MHz, 带宽10 MHz, 信号无固有偏置, 引入信噪比为20 dB的高斯白噪声。

校正前后的信号频谱仿真图如图3所示。图中 P 为信号功率, 以信号最大功率为基准功率, 单位为dB。从图中可以看出信号直接拼接的频谱除了输入信号的谱线外还存在很多杂散分量, 而经过校正以后基本上将通道失配误差带来的杂散分量全部抑制掉了, 得到了很好的频谱特性, 采集系统的性能有明显提高。

5 结束语

并行时间交替采样是在保持采集系统高精度的条件下提高采样速率的一个有效方法, 然而通道间的 mismatch 严重影响了系统性能。本文简单讨论了并行时间交替采集系统的结构, 并提出了一种基于未知信号的误差测量和校正算法, 通过计算机仿真, 证明这种方法计算精度高、算法实现简单, 能有效提高系统性能。

参 考 文 献

- [1] Black W C, Hodges D A. Time interleaved converter arrays[J]. IEEE J. Solid-State Circuits, 1980(15): 1 022-1 029.
- [2] Eklund J E, Gustafsson F G. Digital offset compensation of time-interleaved ADC using random chopper sampling[J]. IEEE international Symposium on Circuits and Systems, 2000, 3:447-450.
- [3] Elbornsson J, Eklund J E. Blind estimation of timing errors in interleaved AD converters[J]. ICASSP, 2001(6): 3 913-3 916.
- [4] 兰 军, 宋 千, 周智敏. 多通道并列数据采集系统非均匀采样校正[J]. 数据采集与处理, 2000, 3(15): 340-344.

编 辑 徐安玉

(上接第294页)

表1 加长周期方法的计算结果

初值		0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40
原始	过渡期	62	961	1 562	722	541	882	1 421	1 461	721	121	301
方法	周期	2 380	2 380	700	2 380	2 380	700	700	2 380	1 120	2 380	700
改进	过渡期	81	261	2	2 141	521	301	1 941	341	181	1 441	1 341
方法	周期	4 900	7 200	7 200	4 900	7 200	700	4 900	4 900	4 900	4 900	4 900

从表中看出, 改进的方法与原方法相比, 几乎没有增加运算量, 反而, 明显地加大了周期长度, 这是所期望的。此外, 也可发现在某些个别点, 改进方法工作并不好, 如初值为0.35时, 改进方法比原方法效果差, 这也从侧面反映了混沌的特性。

4 结束语

有限字长条件下不可能存在真正意义上的混沌轨道, 只可能无限制地加大轨道周期模仿混沌轨道。因为混沌轨道的特点是永不重复过去数据点的演化过程, 所以构成混沌轨道的必要条件是有无穷多个相异数据点, 而有限字长情况下只能产生有限的数据点。又由于混沌的确定性, 故有限字长情况下, 混沌最终会演化成为一个周期态或稳定态。这种有限字长的周期序列能够反映出混沌的特性, 如具有正的最大Lyapunov指数。文献[2]提出的著名的计算最大Lyapunov指数的方法, 在本文中得到进一步的验证, 并发现这个方法对于有限字长也具有鲁棒性, 从而丰富了文献[2]方法的性能评价。

参 考 文 献

- [1] Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y C, et al. The control of chaos: theory and applications[J]. Physics Reports, 2000, 329(3): 103-197.
- [2] Rosenstein M T, Collins J J, De luca C J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D, 1993, 65: 117-134.
- [3] Heidari-Bateni G, McGillem C D. A chaotic direct-sequence spread-spectrum communication system[J]. IEEE Trans on Communications, 1994, 42(234): 1 524-1 527.

编 辑 刘文珍