第 35 卷　第 3 期　电 子 科 技 大 学 学 报　Vol.35　No.3
2006 年 6 月　Journal of University of Electronic Science and Technology of China　Jun. 2006

・计算数学・

5次交错群A_5的10阶子群的一个构造方法

孙自行，王　雪

(阜阳师范学院数学系　安徽 阜阳　236032)

【摘要】A_5的元最大阶数是5，使用有限群的Lagrange定理，A_5的10阶子群元的阶只可能是2，5。但由于拉格朗日定理的逆不成立，因此是否存在A_5的10阶子群仍是问题。该文通过对5-循环置换各次方幂的计算及其研究，找到A_5的10阶子群元的构成规律，并使用构造性方法给出了5次交错群A_5的6个10阶子群。

关　键　词　代数编码；　形式语言；　自动机理论；　5次交错群；　子群；　循环置换

中图分类号　O152.1　　　文献标识码　A

A Way to Construct Ten-Order Subgroup of A_5

SUN Zi-xing，WANG Xue

(Department of Mathematics, Fuyang Normal College　Fuyang Anhui　236032)

Abstract　The maximum order of A_5's element is 5. By using Lagrange theorem , the could-be order of the element of A_5's subgroup are 2 and 5, but in general the inverse of the Lagrange theorem is not hold, whether the ten-order subgroup of A_5 exist is still a problem to discuss. Based on the researching and calculation on the power of 5-cyclic permutation, the forming law of the 10 order subgroup of A_5 is fined and therefore 6 10-order subgroup of A_5 are obtained by using the law.

Key words　algebraic coding theory;　formal language;　automata theory;　alternating group of degree 5; subgroups;　cycle permutation

群及半群理论等代数结构思想是计算机专业重要的专业基础理论。关于子群及子群个数的研究在计算机通信、代数编码及计数理论研究中都具有重要意义。n次对称群S_n是一个重要的群，根据有限群的凯莱(A.Cayley)定理，任何有限群G总同构于S_n的一个子群H，只要能够解决S_n的所有子群H及这些子群的结构，则所有的有限群G的问题就被彻底解决了。当n较大时，要找出S_n的全部子群及决定各个子群的结构是非常困难的。有文献从纯群论的角度或使用计算机辅助算法来讨论n次对称群S_n的情况。文献[1-5]给出了A_5的一些性质；文献[6，7]讨论了群的自由积的高可迁表示；文献[8]使用计算机做出S_6的1　455个子群；文献[9]讨论了S_n的一类子群。这些文献的研究表明对n次对称群S_n及其子群的讨论依然是非常活跃的。

5次对称群S_5的子群A_5的10阶子群是一类在结构上较为复杂的群，本文使用有限群的拉格朗日定理及n次对称群的一些结果，构造性地给出了A_5的6个10阶子群。

1　预备定理

定理 1　设G是有限群，$H\leq G$，则$|G|=|H|\times[G:H]$。其中符号$[G:H]$表有限群G的子群H在G中的指数，

根据拉格朗日定理，可以容易地得到如下重要的推论。

推论　设G是有限群，$\forall a\in G$，其中$|a|$表元素a的阶数，则$|a|\,|\,|G|$。

定理 2　记k-循环置换$\pi=(i_1 i_2\cdots i_k)$，则当k为奇数时，k-循环置换$\pi=(i_1 i_2\cdots i_k)$是偶置换。

证明　使用做置换乘法的方法不难验证$\pi=(i_1 i_2\cdots i_k)=(i_1 i_2)(i_1 i_3)(i_1 i_4)\cdots(i_1 i_k)$，即$\pi$可表为$k$–1个对换，也即

收稿日期：2005 – 11 – 29
项目基金：安徽省自然科学基金资助项目(99047217)；安徽省教育厅自然科学基金资助项目(2005KJ399)
作者简介：孙自行(1953–)，男，副教授，主要从事群论及代数编码方面的研究.

为偶数个对换的乘积，因此π是偶置换，证完。

定理 3 设k是奇数，k-循环置换$\pi=(i_1i_2\cdots i_k)$，则π^1，π^2，π^3，…，π^{k-1}，π^k分别为$(i_1i_2\cdots i_k)$，$(i_1i_3i_5i_7\cdots)$，$(i_1i_4i_7i_{10}\cdots)$，…，$(i_1i_ki_{k-1}i_{k-2}\cdots)$，即$\pi^s=(i_1i_{1+s}i_{1+2s}\cdots)$，(1)；若$i$的下标≥$k$，则应取以$k$为模的余数。

证明 直接做置换的乘法，即可得到上述结论。

2 主要结果

2.1 5-循环置换幂的计算

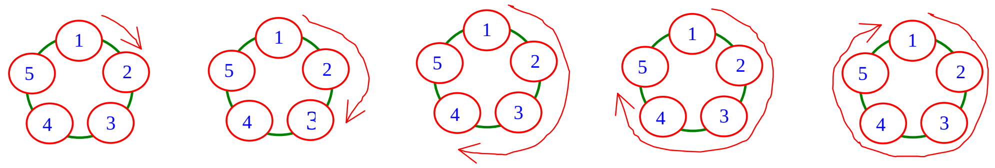
首先以$\pi=(12345)$的各次方的求得过程来说明一个更一般的5-循环置换的各次方幂的计算方法。

使用定理3，可以得到5-循环置换$\pi=(12345)$的各次方为：

$$\begin{array}{ccccc} (12345)^1, & (12345)^2, & (12345)^3, & (12345)^4, & (12345)^5 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ (12345) & (13524) & (14253) & (15432) & (1) \end{array}$$

与上述各次幂的结果相对应的图形如图1。

例如要直接写出$(12345)^3$的方法是先写出“1”，注意到这里是3次方，按顺时针方向，从下一个数开始，连续数3个数写下第2个数“4”，再从4的下一个数开始，连续数3个数写下第3个数“2”，再从2下一个数开始，连续数3个数写下第4个数“5”，同上，再写下第5个数“3”，即得到置换(14253)，如图1所示。



a．依次连续数1个数　b．依次连续数2个数　c．依次连续数3个数　d．依次连续数4个数　e．依次连续数5个数

图1 5-循环置换各次方幂的计算示意图

因$|S_5|=5!=120$，5次对称群S_5的元的奇偶性各占一半，因此A_5刚好包含了5次对称群的全部60个偶置换。由定理2，可写出5次交错群A_5的全部元素，分别为1-循环，3-循环，5-循环。按元的阶数排列，A_5的全部元如下：

1) 1-循环1个，即单位元(1)，阶为1；

2) 3-循环20个，即(123)、(132)，(124)、(142)，(125)、(152)，(134)、(143)，(135)、(153)，(145)、(154)，(234)、(243)，(235)、(253)，(245)、(254)，(345)、(354)，而且其中每组的两个互为逆元；

3) 5-循环24个，使用上述图形所示的方法，全部24个5-循环按1，2，3，4次方幂进行分组，共6组，分别是：

(12345)、(13524)、(14253)、(15432)，　(12354)、(13425)、(15243)、(14532)，
(12435)、(14523)、(13254)、(15342)，　(12453)、(14325)、(15234)、(13542)，
(12534)、(15423)、(13245)、(14352)，　(12543)、(15324)、(14235)、(13452)。

另有15个2×2-循环置换的乘积，按$(ij)(kl)\times(ik)(jl)=(il)(jk)$的结果，又可以分为5组，每组中两个的乘积等于第3个，即：

(12) (34)、(13) (24)、(14) (23)，　(12) (35)、(13) (25)、(15) (23)，
(12) (45)、(14) (25)、(15) (24)，　(13) (45)、(14) (35)、(15) (43)，
(23) (45)、(24) (35)、(25) (34)。

2.2 A_5的10阶子群的构造

定理 4 5次交错群A_5至少存在6个10阶子群。

证明 设10阶子群$H\leq A_5$，由定理1及推论，则H的元的阶只可能为1，2，5，10，但是，显然无10阶元，所以除单位元外，元的阶只能是2或5，组成A_5的10阶子群的元除单位元之外，只可能由上述的5-循环置换及2×2-循环置换的乘积形式的元组成。

首先采用构造性方法给出符合这种条件的6个子集，即：

$$\begin{array}{ccccc} (ijklf)^1, & (ijklf)^2, & (ijklf)^3, & (ijklf)^4, & (ijklf)^5 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ (ijklf), & (ikfjl), & (iljfk), & (iflkj), & (1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

H_1={(12345)，(13524)，(14253)，(15432)，(1)
(12)(35)，(13)(54)，(14)(23)，(15)(42) → (25)(34)}；
H_2={(12354)，(13425)，(15243)，(14532)，(1)
(12)(34)，(13)(45)，(15)(23)，(14)(52) → (24)(35)}：
H_3={(12435)，(14523)，(13254)，(15342)，(1)
(12)(45)，(14)(35)，(13)(24)，(15)(32)， → (25)(34)}；
H_4={(12453)，(14325)，(15234)，(13542)，(1)
(12)(43)，(14)(35)，(15)(24)，(13)(25)， → (23)(45)}；
H_5={(12534)，(15423)，(13245)，(14352)，(1)
(12)(54)，(15)(43)，(13)(25)，(14)(32)， → (24)(35)}；
H_6={(12543)，(15324)，(14235)，(13452)，(1)
(12)(53)，(15)(34)，(14)(25)，(13)(42)， → (23)(45)}。

每个子集的构造方法是：

(1) 包含由一个5-循环置换生成的4个5-循环置换，1个单位元，5个2×2-循环置换乘积。

(2) 前4个2×2-循环置换乘积通过如下的方法构造，最下行的前4个2×2-循环置换乘积是由上一行对应的5-循环置换按下述法则构成，即由上行5-循环置换的前两个数字构成2×2-循环置换乘积的第一个因子，由上行5-循环置换的第3及第5个数字构成2×2-循环置换乘积的第2个因子。箭头示意出了构造过程。

$$\begin{array}{ccccc} (ijklf)^1, & (ijklf)^2, & (ijklf)^3, & (ijklf)^4, & (ijklf)^5, \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ (ijklf), & (ikfjl), & (iljfk), & (iflkj), & (1), \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (ij)(kf), & (ik)(fl), & (il)(jk), & (if)(\mathrm{lj}), & \rightarrow (jf)(kl)。 \end{array}$$

(3) 对于第5个2×2-循环置换乘积的构造，因数字i，j，k，l，f是互不相同的5个数字，每次取其中的两个，共形成10个2-循环置换，它们分别是(ij)，(ik)，(il)，(if)，(jk)，(jl)，(jf)，(kl)，(kf)，(lf)。在构造方法2)中，每个H_{i}的前4个2×2-循环置换乘积共使用其中的8个，余下的两个构成‘→’后第5个2×2-循环置换乘积，因两个不相连的循环置换的乘积可以交换，所以第5个2×2-循环置换的构成是一义的。上述做法仅与数字标号的位置有关，而与数字的数值无关，因此上述每个H_{i}的构成是唯一确定的。

*	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	(1)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)
(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	(1)	(12345)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)
(13524)	(14253)	(15432)	(1)	(12345)	(13524)	(15)(24)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)
(14253)	(15432)	(1)	(12345)	(13524)	(14253)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)
(15432)	(1)	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)	(12)(35)
(1)	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	(1)	(12)(35)	(13)(54)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)
(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)	(12)(35)	(1)	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)
(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(54)	(15432)	(1)	(12345)	(13524)	(14253)
(14)(23)	(15)(42)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(14253)	(15432)	(1)	(12345)	(13524)
(15)(42)	(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(13524)	(14253)	(15432)	(1)	(12345)
(25)(34)	(12)(35)	(13)(45)	(14)(23)	(15)(24)	(25)(34)	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	(1)

图2　子集H_1的元素对A_5的代数运算的封闭性

其次证明$H_i \leq A_5$，i=1，2，3，4，5。

由于上述的做法仅与数字标号的位置有关，因此只要证明其中的一个H_i满足$H_i \leq A_5$，则上述每个$H_i \leq A_5$，i=1，2，3，4，5。下面只证明$H_1 \leq A_5$。

证明　根据一个群的有限子集对于该群的代数运算做成子群的充要条件，只要证明H_1对于A_5的乘法封闭，为此作如下的乘法，见图2。由该乘法，显然H_1对A_5的乘法封闭，所以$H_1 \leq A_5$，证完。

A_5的10阶子群的构造即为本文的主要结果。

3　结　论

一般地，对于一个代数结构来说，研究它的方法之一是要搞清它的子结构的情况，这包括对于存在性及其在同构意义下对于个数的确定，而要解决一个代数结构的子结构的存在性及个数问题是比较困难的。本文的意义在于，使用计算5-循环置换的方幂的办法，找到了构造A_5的10阶子群的简单巧妙的办法；并且猜测A_5只有这6个10阶子群。

参　考　文　献

[1] Machi A, Siconofi A. A new characterization of A5[[J]. Arch. Math., 1977, 29: 385-388.
[2] Arad Z, Chillag D, Herjog M. Classification of finite groups by a maximal subgroup[J]. Journal of Algebra, 1981, 71: 235-244.
[3] Shi Wu-jie, Yang Wen-ze. A new characterization of A_5 and the finite groups in which every element has prime order[J]. Journal of SouthwestTeachers University, 1984, 3(1): 36-40.
[4] Shi Wu-jie. Characterization property of A_5[J]. Journal of Southwest Teachers University, 1986, 7(3):11-14.
[5] Huang Ben-wen. The characterization of A_5[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1997, 2(4): 405-410.
[6] Sun Zi-xing. Highly transitive representation of products of groups[J]. Journal of Nanjing University, 2005, 41(4): 343-349.
[7] Sun Zi-xing. Some remarks on highly transitive representation for free groups[J]. Journal of University of Science Technology of China, 2005, 35(6): 783-788.
[8] Huang Ben-wen. The subgroups of symmetric groups S_6[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2001, 16 (1): 31-35.
[9] Huang Ben-wen. The subgroups of symmetric group S_6 [J]. Journal of Wuhan Transportation University, 2000, 24(2): 129-134.

编　辑　熊思亮

(上接第377页)

4.2　性能分析

本系统中的主站通讯全部采用TCP/IP网络结构，分布式I/O采用PROFIBUS现场总线结构。Webit-GRTU、Intouch监控系统、Siemens PLC S7-400等之间无需中间转换装置便能较好地协同工作、交互数据。其中Webit-GRTU发挥了独立智能控制及协调能力，并经受住钢厂恶劣环境的考验。

比较原来使用Modbus通讯的RTU，每个操作站和服务器接收RTU数据都要配置专门的Modbus通讯模块和通讯软件，而使用Webit-GRTU，通过ActiveX、DDE、OPC很方便的将RTU控制和PLC控制系统融为一体，无须额外的软硬件投资。Webit-GRTU采用了RTL8019AS 10M以太网卡，经测试，单字节传输速率一般在720 μs左右，与传统的RTU串行传输方式相比，速度提高了30～100倍左右。实际应用中，操作站画面的数据扫描周期由原来的5~10 s缩小到2 s以内，完全符合工艺控制要求。同时Webit-GRTU突破了传输距离的限制，通过网关和路由，可以将信息传递到Internet网的任一角落。

5　结　论

Webit-GRTU不仅遵循IEC 60870-5-101/104通讯规约，较好地解决了设备之间的互联及升级问题，而且将RTU的通讯速率提高到了微秒级，保证系统的实时性。实践证明，Webit-GRTU具有网络布线简捷，可扩展性好，抗干扰能力强。它为传统RTU低成本更新换代提供改造参考，通过统一的Internet/Intranet网络覆盖全部智能设备，为实现管控一体化的透明工厂思想开辟了一条有效途径。

参　考　文　献

[1] Burton H L. Embedded internet system: poised for takeoff [J]. IEEE Internet Computing, 1998, (5): 24-29.
[2] 赵　海, 陈飞鸣. Embedded Internet的体系结构及其ONDC模型的实现[J].东北大学学报, 1999, 20(3): 257-260.
[3] 张德干, 郝先臣, 赵　海. 一种基于EI技术的EIDI模型的研究及实现[J].电子学报, 2002, 30(5):749-752.
[4] IEC TC57 WG03. IEC 60870-5-104 Network access for IEC 60870-5-101 using standard transport profiles [R]. Genevese: IEC, 1998.
[5] IEC TC57 WG 10. IEC 61850-5 Communication network and systems in substations [R]. Genevese: IEC, 1999.
[6] 王小英, 王　健, 李明河, 等. 唐钢炉外精炼控制系统设计[J].安徽工业大学学报, 2001, 18(4): 331-334.

编　辑　刘文珍