离散时间风险模型的推广研究

魏瑛源[1]，唐应辉[2]

(1. 河西学院数学系 甘肃 张掖 734000; 2. 成都理工大学信息管理学院 成都 610059)

【摘要】通过引入修正理赔总量和修正盈余的概念，探讨了在相继两时期的理赔总量具有相关性的条件下的一种离散时间风险模型，给出了破产发生时期数和最终破产概率的定义，采用鞅论方法得到了最终破产概率的Lundberg上界。

关 键 词 修正理赔总量; 修正盈余; 调节系数; 破产概率

中图分类号 O211.67 文献标识码 A

Generalized Research on A Discreet Model Risk

WEI Ying-yuan[1]，TANG Ying-hui[2]

(1. Department of Mathematics, Hexi University of China Zhangye Gansu 734000;

2. School of Information Management, Chengdu University of Technology Chengdu 610059)

Abstract Are studied by introducing the modified surplus and modified claim amounts, Some questions in a discrete risk model. The lundberg upper bound of the ultimate probability of ruin is obtained by using the martingale approach.

Key words modified claim amount; modified surplus; adjustment coefficient; probability of ruin

经典的风险模型通常表述如下：给定保险公司一定的初始资本，允许他承保具有某种统计分布的风险，并允许他根据风险的特点连续地(或离散地)收取相应的保费。按照对收取保费的方式划分可以把风险模型分为连续模型和离散模型两种。离散模型采取离散收费的原则，即以一定时间长度为收费的单位区间，在每一单位区间内只收取一次固定的保费。经典的离散时间风险模型都假设不同时期的理赔总量是相互独立同分布的随机变量[1-3]。但是在许多情况下，这种假设是不现实的。为此，本文将做些推广，考虑一阶自回归模型 $AR(1)$ [4]，它容许相继两时期的理赔总量具有相关性。通过引入修正理赔总量和修正盈余的概念，用鞅论方法得到了最终破产概率的Lundberg上界。

1 模型的描述

记U_n为保险公司在时刻$n(n=0,1,2,\cdots)$的盈余，假设：

$$U_n = u + nc - S_n \tag{1}$$

式中 $u=U_0$为初始盈余；c为单位时期(不失一般性，可假定单位时间区间$(n-1,n]$为第n个单位时期)内收取的保费量；S_n为前n个单位时期的理赔总量；再假设：

$$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \qquad n=1,2,\cdots \tag{2}$$

式中 W_i为第i单位时期的理赔总量，且W_i满足AR式(1)模型：

$$W_i = Y_i + aW_{i-1} \qquad i=1,2,\cdots \tag{3}$$

式中 $-1<a<1,\ Y_1,Y_2,\cdots$为相互独立同分布的随机变量，而且$E[Y_i]<(1-a)c$。如果$W_0=\omega$，则就完全决定了W_i的$AR(1)$模型。

为了后面讨论的方便，把满足上述条件的离散时间破产模型记为模型(Ⅰ)。需要注意的是，当$a=0$时，模型(Ⅰ)便是经典的离散时间破产模型[5]。

收稿日期：2004 – 06 – 11
基金项目：四川省学术与技术带头人培养基金资助项目(Y02001011001003)

作者简介：魏瑛源(1970 –)，女，讲师，硕士，主要从事排队论、可靠性和保险风险模型方面的研究.

定义 1　记 $T=\min\{n:n\geq 1,\ U_n<0\,|\,U_0=u\}$，即盈余 U_n 首次小于0的时刻T，称为模型(Ⅰ)的破产发生时期数(若对所有的n均有 $U_n\geq 0$，则理解为 $T=\infty$)。

记 $\Psi(u,\omega)=P\{T<\infty|U_0=u,W_0=\omega\}$，则 $\Psi(u,\omega)$ 称为模型(Ⅰ)的最终破产概率。

显然，$\Psi(u,\omega)$ 是两个变量 u 和 ω 的函数。

2　修正盈余 $\hat{U}_n$ 和修正理赔总量 $\hat{W}_n$

利用递推式(3)，有：

$$W_i=Y_i+aY_{i-1}+\cdots+a^{i-1}Y_1+a^i\omega \tag{4}$$

前n个单位时期的理赔总量为：

$$S_n=Y_n+(1+a)Y_{n-1}+\cdots+(1+a+\cdots+a^{n-1})Y_1+(a+a^2+\cdots+a^n)\omega=$$
$$Y_n+\frac{1-a^2}{1-a}Y_{n-1}+\cdots+\frac{1-a^n}{1-a}Y_1+a\frac{1-a^n}{1-a}\omega \tag{5}$$

当 $n\to\infty$ 时，式(5)右端倒数第二项收敛于 $\frac{1}{1-a}Y_1$，这表明 Y_1 对总理赔量的贡献最终为 $\frac{1}{1-a}Y_1$。

考虑时期 $n+1,\ n+2,\cdots,n+m(n=0,1,2,\cdots)$ 中的理赔总量，并记为 $S_{n,m}$，即：$S_{n,m}=W_{n+1}+W_{n+2}+\cdots+W_{n+m}$，其中每个单位时期的理赔总量 W_i 由式(3)描述的随机过程产生，则：

$$S_{n,m}=\sum_{i=1}^{m}\left(Y_{n+i}\sum_{j=0}^{m-i}a^j\right)+W_n\sum_{j=1}^{m}a^j=\sum_{i=1}^{m}\frac{1-a^{m-i+1}}{1-a}Y_{n+i}+\frac{a-a^{m+1}}{1-a}W_n \tag{6}$$

当 $m\to\infty$ 时，式(6)右端最后一项收敛于 $\frac{a}{1-a}W_n$，则令：

$$\hat{U}_n=U_n-\frac{a}{1-a}W_n \tag{7}$$

式中　$\hat{U}_n$ 为修正盈余；$\hat{u}=\hat{U}_0=u-\frac{a}{1-a}\omega$ 为修正初始盈余。由式(4)得 $\frac{a}{1-a}W_n=\frac{a}{1-a}Y_n+\frac{a^2}{1-a}Y_{n-1}+\cdots+\frac{a^n}{1-a}Y_1+\frac{a^{n+1}}{1-a}\omega$，则：

$$\hat{U}_n=u+nc-S_n-\frac{a}{1-a}W_n=u+nc-\frac{1}{1-a}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)-\frac{a}{1-a}\omega=$$
$$\left(u-\frac{a}{1-a}\omega\right)+nc-\frac{1}{1-a}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n) \tag{8}$$

式中　$\hat{W}_i=\frac{Y_i}{1-a}$ 为第 $i(i=1,2,\cdots)$ 单位时期的修正理赔总量；$\hat{S}_n=\hat{W}_1+\hat{W}_2+\cdots+\hat{W}_n$ 为前 n 个单位时期的修正理赔总量。显然，不同单位时期的修正理赔总量 $\hat{W}_i,i=1,2,\cdots$ 是相互独立同分布的。这样，令：

$$\hat{U}_n=\hat{u}+nc-\hat{S}_n \tag{9}$$

则由式(9)给出了一个经典的离散时间风险模型，记为模型(Ⅱ)，其中 $\hat{u}=\hat{U}_0$ 为初始盈余；c 为单位时期内收取的保费量；$\hat{S}_n$ 为前 n 个单位时期的理赔总量；$\hat{W}_i$ 是第 i 单位时期的理赔总量，且 $\hat{W}_1$，$\hat{W}_2,\cdots$ 相互独立同分布。本文在前面假定 $c>\frac{E[Y_1]}{1-a}$，表明考虑了非负安全负荷，保证了保险公司的安全经营。

定义 2　记 $\hat{T}=\min\{n:n\geq 1,\ \hat{U}_n<0\,|\,\hat{U}_0=\hat{u}\}$，即盈余 $\hat{U}_n$ 首次小于 0 的时刻 $\hat{T}$，称为模型(Ⅱ)的破产发生时期数(若对所有的 n 均有 $\hat{U}_n\geq 0$，则理解为 $\hat{T}=\infty$)。

记 $\hat{\Psi}(\hat{u})=P\{\hat{T}<\infty\,|\,\hat{U}_0=\hat{u}\}$，则 $\hat{\Psi}(\hat{u})$ 称为模型(Ⅱ)的最终破产概率。

定义 3　定义模型(Ⅱ)的调节系数为方程：

$$\exp(-cr)M_{\hat{W}_i}(r)=1 \tag{10}$$

的正解 $\hat{R}$，则 $\hat{R}$ 具有性质：

$$\ln E\left[\exp\left(\frac{\hat{R}Y_i}{1-a}\right)\right]-c\hat{R}=0 \tag{11}$$

这表明$\hat{R}$和Y_i的分布与a,c的值有关。其中$M_{\hat{W}_i}(r)=E[\exp(r\hat{W}_i)]=E\left[\exp\left(r\dfrac{Y_i}{1-a}\right)\right]$为$\hat{W}_i=\dfrac{Y_i}{1-a}$的矩母函数。

3 重要结果

定理　对推广模型(Ⅰ)，其最终破产概率$\varPsi(u,\omega)$为：

$$\varPsi(u,\omega)=\frac{\exp(-\hat{R}\hat{u})}{E[\exp(-\hat{R}\hat{U}_T)\,|\,T<\infty]} \tag{12}$$

证明　令$\hat{V}_n=nc-\hat{S}_n, n=1,2,\cdots$，则：$\hat{V}_{n+1}-\hat{V}_n=c-\hat{W}_{n+1}=c-\dfrac{Y_{n+1}}{1-a}$。由于$Y_1,Y_2\cdots$相互独立同分布，则$\{\hat{V}_n\,|\,n\geq 1\}$是具有齐次独立增量的随机序列，这样[3]：

$$\lim_{n\to\infty}\hat{U}_n=+\infty \tag{13}$$

又令$X_n=\exp(-\hat{R}\hat{U}_n)=X_0\exp(-\hat{R}\hat{V}_n), Z_n=-\hat{R}\hat{V}_n$，其中$X_0=\exp(-\hat{R}\hat{u})$，则$\{Z_n\,|\,n\geq 1\}$是零初值、且具有齐次独立增量的随机序列，且由式(10)得：

$$E[\exp(Z_1)]=E[\exp(-\hat{R}\ \hat{V}_1)]=E[\exp(-\hat{R}c+\ \hat{R}\ \hat{S}_1)]=\exp(-\hat{R}c)E\left[\exp\left(\hat{R}\frac{Y_1}{1-a}\right)\right]=\exp(-\hat{R}c)M_{\hat{W}_1}(\hat{R})=1$$

那么$\{X_n|n\geq 1|\}$为一正鞅[5]。于是，对于破产发生时期数$\hat{T}$，以及任意给定时刻t，$\hat{T}\wedge t$为正鞅$\{X_n\,|\,n\geq 1\}$的有界停时[5]，特别地，取$t=T$时，$\hat{T}\wedge T$也为正鞅$\{X_n\,|\,n\geq 1\}$的有界停时，则$E[X_{\hat{T}\wedge T}]=E[X_0]=\exp(-\hat{R}\hat{u})$其中$\hat{T}\wedge T=\min\{\hat{T},T\}$，所以：

$$\begin{aligned}\exp(-\hat{R}\hat{u})=&\ E[X_{\hat{T}\wedge T}\,|\,T<\hat{T}]\ P\{T<\hat{T}\}+E[X_{\hat{T}\wedge T}\,|\,T\geq\hat{T}]\ P\{T\geq\hat{T}\}=\\ &E[X_T\,|\,T<\hat{T}]P\ \{T<\hat{T}\}+E[X_{\hat{T}}\,|\,T\geq\hat{T}]\ P\{T\geq\hat{T}\}=\\ &E[\exp(-\hat{R}\ \hat{U}_T)\ |\,T<\hat{T}]\ P\{T<\hat{T}\}+E[\exp(-\hat{R}\ \hat{U}_{\hat{T}})\ |\,T\geq\hat{T}]\ P\{T\geq\hat{T}\}\end{aligned} \tag{14}$$

这样，在式(14)的两端令$\hat{T}\to\infty$，并由式(13)注意到$\lim\limits_{\hat{T}\to\infty}\exp(-\hat{R}\hat{U}_{\hat{T}})=0$，得：

$$\exp(-\hat{R}\hat{u})=E[\exp(-\hat{R}\hat{U}_T)\big|T<\infty]\ P\{T<\infty\}$$

则式(12)得证。

推论　如果$0\leq a<1$，则：

$$\varPsi(u,\omega)\leq\exp(-\hat{R}\hat{u}) \tag{15}$$

证明　因为$0\leq a<1$时，由$\hat{U}_n=U_n-\dfrac{a}{1-a}W_n$，得$\hat{U}_n\leq U_n$，特别地，$\hat{U}_T\leq U_T<0$于是式(15)得证。

参 考 文 献

[1] 鲍尔斯 N L. 风险理论[M]. 郑 瑜, 余跃年, 译. 上海: 科学技术出版社, 1995.

[2] 盖伯, 汉斯 U. 数学风险论导引[M]. 成世学, 严 颖译. 北京: 世界图书出版公司, 1997.

[3] 成世学. 完全离散的经典风险模型[J]. 运筹学学报, 1998, 12(3): 42-54.

[4] Peter J B, Richard A D. Time series: theory and methods[M]. New York: Springer -Verlag, 1991.

[5] Ross S M. Stochastic processes[M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.

编 辑 刘文珍