

# 由图像的稀疏分解重建图像的快速算法

尹忠科<sup>1</sup>, 王建英<sup>1</sup>, Pierre Vandergheynst<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031; 2. 瑞士联邦高工信号处理实验室 洛桑 瑞士)

**【摘要】**针对由图像的稀疏分解结果重建图像的速度极其缓慢这一问题,研究了表示图像的原子能量分布特性。利用了表示图像内容的绝大部分原子的能量分布具有非常集中的特点,提出了由分解后的原子参数重建图像的快速算法。该算法对于一个原子的计算只限于原子能量集中的区域,并在此基础上实现了原子能量及原子归一化的快速计算。采用快速算法使图像重建的速度提高了约32倍,同时保证快速重建图像的质量保持不变。

**关键词** 图像处理; 稀疏分解; 匹配跟踪; 图像重建  
中图分类号 TN911.73; TP391.4 文献标识码 A

## A Fast Algorithm for Image Reconstruction Based on sparse Decomposition

YIN Zhong-ke<sup>1</sup>, WANG Jian-ying<sup>1</sup>, Pierre Vandergheynst<sup>2</sup>

(1. School of Info. Sci. & Tech, Southwest Jiaotong University Chengdu 610031;  
2. Signal Processing Lab., Swiss Federal Institute of Technology at Laussane, Switzerland)

**Abstract** It is very slow at present to reconstruct an image from its sparse decomposition results. To overcome this one of main drawbacks in image sparse decomposition, the energy distribution property of the atoms is studied in this paper. Based on the property that energy of most atoms is very concentrated, an algorithm is proposed to fast reconstruct an image from atoms' parameters by limiting atom reconstruction calculating within the atom energy concentrating area. Moreover, methods for fast calculating atom energy and normalization are also proposed. The fast algorithm presented in this paper improves the speed of the image reconstructing by about 32 times and at the same time doesn't degrade the reconstructed image quality at all.

**Key words** image processing; sparse decomposition; matching pursuit; image reconstruction

为了实现对信号的更加灵活、简洁和自适应的表示,在小波分析的基础上,文献[1]提出了信号在过完备库(Over-Complete Dictionary)上分解的方法。该方法可以得到一个非常简洁的信号的稀疏表示(Sparse Representation),而得到信号稀疏表示的过程称为信号的稀疏分解。由于信号的稀疏表示的优良特性,其研究很快被从一维信号推广到作为二维信号的图像表示研究上。文献[2]提出了图像稀疏分解的匹配跟踪(Matching Pursuit, MP)方法。目前针对图像的稀疏分解已经发展了多种算法,其中最常用的为MP算法。图像稀疏分解也已经成功应用于图像处理的多个方面,如图像压缩、去噪和识别等<sup>[2-4]</sup>。由于图像的稀疏分解在图像处理中的成功应用,已经引起了越来越多研究人员的重视,形成对图像稀疏分解研究的热潮。2003年国际图像处理年会(IEEE ICIP)首次对图像稀疏分解进行专门讨论<sup>[5]</sup>。

### 1 图像稀疏分解和图像的重建

假设研究的图像为  $f$ , 图像大小为  $M_1 \times M_2$ ,  $M_1$  和  $M_2$  分别为图像的长和宽。若将图像分解在一组完备正交的基上,则这组基的数目应为  $M_1 \times M_2$ 。由于基的正交性,因而基在由图像所组成的空间中的分布是稀疏的,从而,图像的能量在分解以后将分散分布在不同的基上,这种能量分布的分散最后将导致用基的组合表示图像时表达不简洁,即图像表示不是稀疏的。非稀疏的表示,不利于图像的处理,如识别和压缩

收稿日期: 2004-03-15

基金项目: 国家留学基金资助项目(2001-3048), 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目([2004]527号), 四川省科技攻关项目(04GG021-020-05), 四川省应用基础研究项目(04JY029-059-2)

作者简介: 尹忠科(1969-), 男, 博士, 教授, 主要从事信号与信息处理、及图像处理方面的研究。

等。为了得到图像的稀疏表示,基的构造必须使得基在图像组成的空间中足够密。由此,基的正交性将不再被保证,所以此时的基也不再是真正意义上的基了,而改称为原子。由这些原子组成的集合,是过完备的,被称为过完备库(Over-Complete Dictionary of Atoms)。图像在过完备库上的分解结果一定是稀疏的<sup>[1-2]</sup>。

设  $D = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  为用于进行图像稀疏分解的过完备库,  $g_\gamma$  为由参数组  $\gamma$  定义的原子,用不同的方法构造原子,参数组  $\gamma$  所含有的参数及参数个数也不一样。原子  $g_\gamma$  的大小与图像本身大小相同,但原子应作归一化处理,即  $\|g_\gamma\| = 1$ 。 $\Gamma$  为参数组  $\gamma$  的集合。由库的过完备性可知,参数组  $\gamma$  的个数应远远大于图像的大小,即若用  $P$  表示过完备库  $D = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  中原子的个数,则:  $P \gg M_1 \times M_2$ 。通过图像稀疏分解,可以得到图像的一个线性表示<sup>[2]</sup>:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle R^k f, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} \quad (1)$$

式中  $\langle R^k f, g_{\gamma_k} \rangle$  表示图像  $f$  或图像的残余  $R^k f$  在对应原子  $g_{\gamma_k}$  上的分量。由于  $\|R^n f\|$  的衰减特性<sup>[1-2]</sup>,用少数的原子(与图像大小相比较而言)就可以表示图像的主要成分,即:

$$f \approx \sum_{k=0}^{n-1} \langle R^k f, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} \quad (2)$$

式中  $n \ll M_1 \times M_2$ 。式(2)和条件  $n \ll M_1 \times M_2$  集中体现了稀疏表示的含义。

图像稀疏分解的过程是由图像求得表示图像中主要成份的一组  $n$  个原子的参数及图像  $f$  或图像的残余  $R^k f$  在对应原子  $g_{\gamma_k}$  上的分量;图像重建的过程即是由这组  $n$  个原子的参数及图像  $f$  或图像的残余  $R^k f$  在对应原子上的分量来恢复原图像的过程。

目前,对图像稀疏分解过程的研究比较集中,而对图像重建过程的研究很少,这主要是因为图像稀疏分解的计算量大。然而,在很多情况下,图像重建的计算量问题也会显得很突出。例如,利用网络进行图像浏览时,如果用基于图像稀疏分解的结果进行压缩编码和传输,在目前图像重建速度的条件下,浏览图像时等待的时间大致和图像重建的时间相当。而目前根据式(2)进行的图像重建过程一般需要数分钟,对于图像浏览而言,这样的计算速度是不可忍受的。针对利用式(2)进行图像重建的速度问题,本文通过分析构成图像原子的能量特性和形成方法,提出了图像重建的快速算法。

## 2 图像重建的快速算法

### 2.1 原子的能量特性

图像稀疏分解中使用的原子,和真实的物理世界的原子,有一个共同的特性:原子的能量非常集中,其绝大部分的能量分布在原子的中心,而在其他地方分布极少。如图1和图2所示,图1表示图像稀疏分解中使用的一个原子,图2表示它的能量分布,白色部分表示存在能量的地方,处于原子的中心位置;黑色部分表示基本不存在能量的地方,处于原子的四周。



图1 一个原子

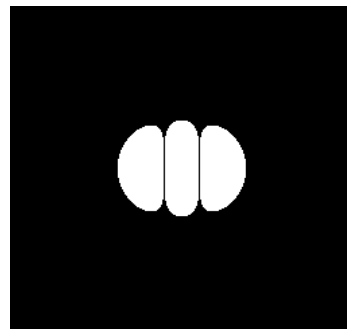


图2 原子能量分布

### 2.2 图像重建的快速算法1

和根据DCT系数或WT系数重建图像相比,由图像稀疏分解的参数利用式(2)进行图像重建,其计算量大得多。每次根据参数计算得到一个原子  $g_{\gamma_k}$ ,就要计算一个函数,而这个函数由原子的选取来决定的<sup>[6]</sup>。其计算量大的根本原因在于,这个函数的计算范围和图像大小相同。

通过本文研究发现, 这样的计算范围是完全没有必要的。因为原子的能量主要集中在原子的中心, 所以, 计算原子时, 只要计算其中心就可以了。当原子的中心部分本身就较大时, 称这样的原子是大原子; 反之, 当原子本身能量较小, 即: 中心部分较小时, 称之为小原子。研究发现, 为了表示图像, 所使用的大原子的数目极其有限, 使用的原子绝大部分是小原子。因为只有小原子才能表示图像细节, 而大原子只是用来表示图像背景。通过计算原子的中心部分代替计算原子, 可以使得原子的计算速度大大提高, 从而提高了利用式(2)进行图像重建的速度。利用这种快速算法重建图像, 如果原子的中心部分选取得当, 重建图像的质量不受影响。

### 2.3 图像重建的快速算法2

在图像稀疏分解时, 为了用尽可能少的参数表示图像, 原子的能量参数是不作为稀疏分解结果中的参数的, 这是因为它和原子的尺度(Scale parameters)相关, 可由原子的尺度参数计算出原子的能量。另一方面, 利用式(2)进行图像重建时, 原子  $g_{\gamma_k}$  本身是必须归一化的。所以在图像重建的过程中, 相当一部分的计算量是花费在计算原子能量和原子的归一化上。对于一个原子而言, 一旦它的尺度参数确定后, 它的能量也就确定了, 所以, 在图像重建过程中, 没有必要进行原子能量的计算。只需根据原子尺度和原子能量关系, 构造一个表, 对应于每组原子尺度参数, 查表就可以得到其对应原子能量。这样就简化了原子  $g_{\gamma_k}$  的归一化过程, 提高原子  $g_{\gamma_k}$  的形成速度, 也就相应提高了图像重建的速度。

## 3 实验结果

本文在实验中采用256×256大小8 bit的标准Lena图像, 过完备库中原子的构造方法按文献[6]。先利用MP方法把图像分解成500个原子的线性组合, 然后利用式(2)重建原图像。表1给出了本文提出的快速算法和利用式(2)直接计算重建图像的速度比较。在重建图像质量不变的条件下, 本文提出的快速算法, 可使图像重建的速度提高32倍。如果在实验中利用别的原子类型和构造方法, 如利用文献[2]中的原子, 也可以得到相似的结论。

表1 快速算法重建图像速度和式(2)直接计算重建图像速度比较

算 法	由式(2)直接计算图像重建时间/快速算法图像重建时间
图像重建的快速算法1	20
图像重建的快速算法2	1.6
(算法1)+(算法2)	$20 \times 1.6 = 32$

本文研究工作得到了西南交通大学基金资助, 在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuit with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, 41(12):3 397-3 415.
- [2] Bergeau F, Mallat S. Matching pursuit of images[A]. Proceedings of IEEE-SP[C]. Philadelphia, PA, USA, IEEE Press, 1994: 330-333.
- [3] Neff R, Zakhor A. Very low bit-rate video coding based on matching pursuit[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Tech. 1997, 7(1): 158-171.
- [4] Phillips P. Matching pursuit filter design[A]. Proceedings of the 12th IAPR international conference on SP[C]. Jerusalem Israel, 1994: 57 - 61.
- [5] SESSION MA-S2: Redundant Representations for Visual Communications[A]. Proceedings of IEEE ICIP[C]. IEEE Presss, Barcelona, Spain, 2003, 33-64.
- [6] Vandergheynst P, Frossard P. Efficient image representation by anisotropic refinement in matching pursuit[A]. Proceedings of IEEE on ICASSP[C]. IEEE Press, Salt Lake City, UT, USA, 2001, 1 757-1 760.

编 辑 刘文珍