第 35 卷 第 4 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.35 No.4
2006 年 8 月 Journal of University of Electronic Science and Technology of China Aug. 2006

·计算数学·

含一般时延的高阶泛函微分方程的周期解

刘兴文[1]，钟守铭[2]，张凤荔[3]

(1. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054; 2. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054;

3. 电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 610054)

【摘要】研究了一类含有“一般”时延的高阶泛函微分方程的周期解问题，将原方程化为等价的泛函微分方程，并利用该等价泛函微分方程的特征方程，得到了原方程具有周期解的充分必要条件，即其等价方程的特征方程具有不为零的纯虚根。

关 键 词 高阶泛函微分方程; 周期解; 等价方程; 时延

中图分类号 O175 文献标识码 A

Periodic Solution of High-Order FDE with General Delays

LIU Xing-wen[1]，ZHONG Shou-ming[2]，ZHANG Feng-li[3]

(1. School of Electronic Engineering, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054;

2. School of Applied Mathematics, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054;

3. School of Computer Science and Engineering, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper the periodic solution problem of high-order Functional Differential Equations (FDE) with “general” delays is studied. By changing the original equations into its equivalent FDEs and using the characteristic equation of the equivalent FDEs, the sufficient and necessary condition on which the periodic solutions of the original equations exist is presented, i.e., characteristic equation of the equivalent FDEs has nonzero imaginary solutions.

Key words high-order functional differential equation; periodic solution; equivalent equation; delay

1 绪 论

对于泛函微分方程的周期解问题，文献[1-4]针对不同情况进行了研究，现考虑如下方程：

$$\boldsymbol{x}^{(m)}(t)=\sum_{i=0}^{m-1}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t)) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$；$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$；$r_i$ 为正实数；m 为自然数。文献[1]对式(1)的周期解进行了研究，给出了周期解存在的充分必要条件。显然，对任一固定 i，$\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)$ 的各个分量 $x_j^{(i)}\ (t-r_i)$ 有着相等的时延 r_i，$j=1,2,\cdots,n$。本文针对具有“一般”时延(即 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)$ 的不同分量 $x_j^{(i)}\ (t-r_i)$ 具有不同时延 r_{ij})的高阶泛函微分方程，给出了该类方程存在非常数周期解的充分必要条件。

2 主要结果

引理 1[3]考虑方程：

$$\boldsymbol{x}^{(m)}(t)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r) \tag{2}$$

式中 $a_i,r\in R$ 均为常数，且 $r>0$，$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}$。式(2)对应的特征方程为：

$$\lambda^m-(\sum_{i=0}^{m-1}a_i\lambda^i)\mathrm{e}^{-r\lambda}=0 \tag{3}$$

式(2)具有非常数周期解的充分必要条件是其特征式(3)具有不为零的纯虚根。在许多情况下遇到的是比式(2)更一般的情形：

收稿日期：2004 – 03 – 04
作者简介：刘兴文(1973 –)，男，硕士，主要从事控制和稳定性方面的研究.

引理 **2**　考虑方程：

$$\boldsymbol{x}^{(m)}(t)=\sum_{i=0}^{m-1}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t))+\sum_{k=1}^{q}t\int_{-c_k}^{0}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta \tag{4}$$

式中　$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ ；$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_k\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 且为常值矩阵；$r_i,c_k\in R$ ；q 为自然数。则式(4)具有非常数周期解的充分必要条件是其特征方程：

$$\det(\lambda^m\boldsymbol{I}-\sum_{i=0}^{m-1}(\lambda^i\mathrm{e}^{-r_i\lambda}\boldsymbol{A}_i+\lambda^i\boldsymbol{B}_i)-\sum_{k=1}^{q}(1-\mathrm{e}^{-c_k\lambda})\boldsymbol{C}_k)=0 \tag{5}$$

具有非零的纯虚根。其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

证明　令

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{6}$$

为式(4)的形式解，式中 $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ ，将式(6)代入式(4)可得：

$$\lambda^m\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{\lambda t}=\sum_{i=0}^{m-1}(\lambda^i\mathrm{e}^{-r_i\lambda}\boldsymbol{A}_i+\lambda^i\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{\lambda t}+\sum_{k=1}^{q}((1-\mathrm{e}^{-c_k\lambda})/\lambda)\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{7}$$

即

$$(\lambda^m\boldsymbol{I}-\sum_{i=0}^{m-1}(\lambda^i\mathrm{e}^{-r_i\lambda}\boldsymbol{A}_i+\lambda^i\boldsymbol{B}_i)-\sum_{k=1}^{q}((1-\mathrm{e}^{-c_k\lambda})/\lambda)\boldsymbol{C}_k)=0 \tag{8}$$

从而可得式(4)对应的特征方程即式(5)。余下的证明过程类似于引理1，本文略去。在式(4)中，对任一固定 i ，$\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)$ 仅有一个时延 r_i ，即同次微分仅有一个时延。可推广到如下情形，即同次微分含有多个时延：

引理 **3**　考虑方程：

$$\boldsymbol{x}^{(m)}(t)=\sum_{i=0}^{m-1}(\sum_{j=1}^{p_i}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_{ij})+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t))+\sum_{k=1}^{q}\int_{-c_k}^{0}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

式中　$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ ；$\boldsymbol{A}_{ij},\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_k\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ ，且为常值矩阵；$r_{ij},c_k\in R$ ；p_i,q 均为正整数。式(9)对应的特征方程为：

$$\det(\lambda^m\boldsymbol{I}-\sum_{i=0}^{m-1}(\sum_{j=1}^{p_i}\lambda^i\mathrm{e}^{-r_{ij}\lambda}\boldsymbol{A}_{ij}+\lambda^i\boldsymbol{B}_i)-\sum_{k=1}^{q}((1-\mathrm{e}^{-c_k\lambda})/\lambda)\boldsymbol{C}_k)=0 \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。则式(9)具有非常数周期解的充分必要条件是其特征式(10)具有非零纯虚根。

证明　证明过程类似于引理2，故略去。

式(4)对任一固定 i ，$\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)$ 的各个分量 $x_j^{(i)}(t-r_i)$ 有着一个相等的时延 r_i ，$j=1,2,\cdots,n$ 。若使各分量有相异时延，则有如下定理：

定理 1　对方程：

$$\begin{bmatrix}x_1^{(m)}(t)\\x_2^{(m)}(t)\\\vdots\\x_n^{(m)}(t)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{m-1}\left(\boldsymbol{A}_i\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t-r_{i1})\\x_2^{(i)}(t-r_{i2})\\\vdots\\x_n^{(i)}(t-r_{in})\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_i\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t)\\x_2^{(i)}(t)\\\vdots\\x_n^{(i)}(t)\end{bmatrix}\right)+\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\int_{-c_1}^{0}x_1(t+\theta)\mathrm{d}\theta\\\int_{-c_2}^{0}x_2(t+\theta)\mathrm{d}\theta\\\vdots\\\int_{-c_n}^{0}x_n(t+\theta)\mathrm{d}\theta\end{bmatrix} \tag{11}$$

式中　$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$ ，T 表转置；$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ ，$\boldsymbol{A}_i=(a_{lk}^i)$ ；r_{ij},c_j 均为正实数，$j=1,2,\cdots,n$ ，$l,k=1,2,\cdots,n$ ；$r_i=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{r_{ij}\}$ ；$c=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{c_j\}$ ；$\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_i)$ 和 $\int_{-c}^{0}\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta$ 都存在且不为无穷。则式(11)可以化为形如式(9)。

证明

$$\boldsymbol{A}_i\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t-r_{i1})\\x_2^{(i)}(t-r_{i2})\\\vdots\\x_n^{(i)}(t-r_{in})\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t-r_{ij})\\x_2^{(i)}(t-r_{ij})\\\vdots\\x_n^{(i)}(t-r_{ij})\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_{ij}) \tag{12}$$

式中　$\boldsymbol{A}_{ij}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ ，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 的第 j 列元素同于 $\boldsymbol{A}_i$ 的第 j 列元素，其余元素均为0。即

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{bmatrix} & a_{1j}^i & \\ & a_{2j}^i & \\ \boldsymbol{O}_1 & \vdots & \boldsymbol{O}_2 \\ & a_{nj}^i & \end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2$ 为适当维数的零矩阵。且有：

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\int_{-c_1}^{0} x_1(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \int_{-c_2}^{0} x_2(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \vdots \\ \int_{-c_n}^{0} x_n(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}_j\begin{bmatrix}\int_{-c_j}^{0} x_1(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \int_{-c_j}^{0} x_2(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \vdots \\ \int_{-c_j}^{0} x_n(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}_j\int_{-c_j}^{0}\boldsymbol{x}(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{C}_j\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}_j$ 的第 j 列元素同于 $\boldsymbol{C}$ 的第 j 列元素，其余元素均为0，即：$\boldsymbol{C}_j=\begin{bmatrix} & c_{1j} & \\ & c_{2j} & \\ \boldsymbol{O}_1 & \vdots & \boldsymbol{O}_2 \\ & c_{nj} & \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2$ 为适当维数的零矩阵。将式(12)、(13)代入式(11)即得：

$$\begin{bmatrix}x_1^{(m)}(t)\\ x_2^{(m)}(t)\\ \vdots \\ x_n^{(m)}(t)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t-r_{ij})\\ x_2^{(i)}(t-r_{ij})\\ \vdots \\ x_n^{(i)}(t-r_{ij})\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_i\begin{bmatrix}x_1^{(i)}(t)\\ x_2^{(i)}(t)\\ \vdots \\ x_n^{(i)}(t)\end{bmatrix}\right)+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}_j\begin{bmatrix}\int_{-c_j}^{0} x_1(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \int_{-c_j}^{0} x_2(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ \vdots \\ \int_{-c_j}^{0} x_n(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{bmatrix}=$$

$$\sum_{i-0}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}(t-r_{ij})+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}^{(i)}(t)\right)+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}_j\int_{-c_j}^{0}\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

可见，式(14)属于式(9)的一种情形。故定理得证。

定理 2 式(11)具有非常数周期解的充分必要条件是式(14)的特征方程具有不为零的纯虚根。

证明 易见，式(14)的特征方程为：

$$\det\left(\lambda^m\boldsymbol{I}-\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda^i\mathrm{e}^{-r_{ij}\lambda}\boldsymbol{A}_{ij}+\lambda^i\boldsymbol{B}_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\left((1-\mathrm{e}^{-c_k\lambda})/\lambda\right)\boldsymbol{C}_j\right)=0 \tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。由定理1可知，式(11)等价于式(14)；由引理3可知，式(14)存在非常数周期解的充分必要条件是式(15)具有非零纯虚根，故式(11)具有非常数周期解的充分必要条件是式(15)具有非零纯虚根。

证毕

3 结 论

本文研究了含一般时延的高阶泛函微分方程的周期解问题。在把原方程化为等价的泛函微分方程的基础上，利用该等价方程的特征方程，得到了关于原方程周期解存在的充分必要条件的定理。由于定理2讨论了含一般时延的高阶泛函微分方程，它为处理相关问题时增加了灵活性。并且，若在式(11)中存在 r_{ij},c_j 为负实数，类似的推证表明定理2仍然成立。这使得本文的结果有更广泛的应用范围。

参 考 文 献

[1] 李森林, 温立志. 泛函微分方程[M]. 湖南: 湖南科学技术出版社, 1987.
[2] Kolmanovskii V, Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999.
[3] 秦元勋, 刘永清, 王 联, 等. 带有时滞的动力系统的运动稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1989.
[4] Hale J. Theory of functional differential equations[M]. New York : Inc..Springer-Verlag, 1977.

编 辑 孙晓丹