

# 阵列误差对多参数联合估计性能的影响

王建英<sup>1</sup>, 解梅<sup>2</sup>, 尹忠科<sup>1</sup>

(1. 西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031; 2. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】**建立了频率、二维到达角和极化联合估计的阵列误差信号模型,分析了阵列误差对用ESPEIT算法进行参数估计性能的影响。推导了在阵列误差模型下,频率、二维到达角和极化联合估计算法中各参数估计结果的均方误差。计算机模拟结果证实了分析结果的正确性。

**关键词** 阵列误差; 二维到达角估计; 极化估计; 均方误差  
**中图分类号** TN82 **文献标识码** A

## Performance Analysis for Joint Estimation of Multi-Parameters under Array Error

WANG Jian-ying<sup>1</sup>, XIE mei<sup>2</sup>, YIN Zhong-ke<sup>1</sup>

(1. School of Information Science & Technology, Southwest Jiaotong University Chengdu 610031;  
2. Electronic Engineering, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054)

**Abstract** The array error model of joint frequency, two-Dimensional Angles of Arrival (2-D AOA) and polarization estimation is constructed. The paper then analyzes the parameter estimation performance of the algorithm based on theoretical conditions under array error and deduces the Mean-Square Error (MSE) of frequency, 2-D AOA and the polarizations. From the computer simulation we can see that the theoretical results and the simulation are similar.

**Key words** array error; two-dimensional angles of arrival estimation; polarization estimation; mean square error

多信号多参量联合估计已成为许多研究课题(例如,未知辐射源识别,有源隐身或有源对消干扰等技术)的重要研究内容,并越来越受到广泛重视<sup>[1-4]</sup>。其中文献[4]提出了用L阵和ESPRIT算法对频率、二维到达角和极化的联合估计算法。但这些算法是基于理想阵列模型下,即假设所有阵元及其通道的增益和相位完全相同,各阵元位置确定且与标称位置无偏差,各阵元方向图完全一致,且阵元间不存在互耦。对于实际系统而言,工程上要满足上述假设条件十分困难。因此,在阵列误差模型下对多参量估计性能影响的分析很有必要。

本文针对文献[4]所提出的用ESPRIT算法进行频率、二维到达角和极化联合估计的算法,分析了在阵列误差模型下各参数估计的性能,导出了各参量估计的均方误差。

### 1 阵列误差模型

文献[4]采用了L型阵列结构,假设X轴方向和Y轴方向均为L对偶极子均匀线阵构成,阵元间距为 $\delta$ ,如图1所示。设有P个非高斯、独立、远场信号入射到阵列上,每个入射信号具有任意的极化状态。在理想阵列模型情况下,阵列由M(M>P)对和坐标轴方向一致的偶极子对构成。文献[4]得到了理想阵列模型下的阵列输出模型为:

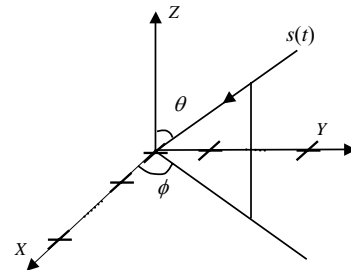


图1 L阵结构

收稿日期: 2004-07-01

基金项目: 信息产业部“十五”预研基金资助项目; 四川省科技攻关资助项目(04JJ006-025; 2006X15-038)

作者简介: 王建英(1972-),女,副教授,工学博士,主要从事阵列信号处理、智能天线技术、谱估计技术方面的研究。

$$z(t) = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_p]$  是  $2(2L-1) \times P$  矩阵, 列向量  $\mathbf{a}_k$  由下式给出:

$$\mathbf{a}_k = [\mathbf{u}_{0x}^T(k), \mathbf{u}_{1x}^T(k)p_k, \dots, \mathbf{u}_{(L-1)x}^T(k)p_k^{L-1}, \mathbf{u}_{1y}^T(k)q_k, \mathbf{u}_{2y}^T(k)q_k^2, \dots, \mathbf{u}_{(L-1)y}^T(k)q_k^{L-1}]^T \quad (2)$$

式中  $p_k, q_k$  分别为第  $k$  个信号在  $X$  轴方向和  $Y$  轴方向相邻阵元之间的空间相移因子;  $\mathbf{u}_m(k)$  为考虑到信号极化特征后第  $m$  个阵元  $X$  轴方向偶极子和  $Y$  轴方向偶极子第  $k$  个信号的输出系数<sup>[4]</sup>:

$$p_k = e^{j\frac{2\pi\delta}{\lambda_k} \sin\theta_k \cos\phi_k}, \quad q_k = e^{j\frac{2\pi\delta}{\lambda_k} \sin\theta_k \sin\phi_k} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_m(k) = \begin{bmatrix} u_{mx}(k) \\ u_{my}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\gamma_k \cos\theta_k \cos\phi_k e^{j\eta_k} - \cos\gamma_k \sin\phi_k \\ \sin\gamma_k \cos\theta_k \sin\phi_k e^{j\eta_k} + \cos\gamma_k \cos\phi_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $\theta, \phi$  为信号的到达角(见图1);  $\gamma, \eta$  为信号的极化参量。

在实际应用中, 达到上述理想条件是很困难的。阵元的位置误差、通道增益和相位的不一致性以及测量误差等原因引起的阵列误差不可避免。在阵列误差模型下, 阵列输出可表示为:

$$z(t) = (\mathbf{A} + \partial\mathbf{A})s(t) + \mathbf{n}(t) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\mathbf{A}}s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (5)$$

式中 阵列误差  $\partial\mathbf{A}$  是零均值互不相关的随机变量。假设阵列误差远小于理想值, 因此  $\partial\mathbf{A}$  可以当作矩阵  $\mathbf{A}$  的扰动因子。按照文献[4]的分析, 得到组合矩阵:

$$z'(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}'s(t) + \mathbf{n}'(t) \quad (6)$$

式中  $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{A}}\Phi_f \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{n}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}(t+1) \end{bmatrix}$ ;  $\Phi_f = \text{diag}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_p}) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ ;  $d_k = e^{j\omega_k} = e^{j2\pi f_k}$ 。

## 2 阵列模型影响分析

对  $z'(t)$  的自协方差矩阵  $R' = E\{z'(t)[z'(t)]^H\}$  作特征值分解, 根据子空间理论可知与  $P$  个最大的特征值对应的特征矢量构成信号子空间, 记为  $E_s$ , 其余的特征矢量构成噪声子空间, 则必然存在唯一的非奇异变换矩阵  $T$ , 使得  $E_s = \mathbf{A}'T$ 。

首先计算  $d_k, k=1, 2, \dots, K$ 。按照由  $\bar{\mathbf{A}}$  构成  $\mathbf{A}'$  的方式将  $E_s$  划分成两个子阵  $E_1$  和  $E_2$ 。则:

$$E_s = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}T \\ \bar{\mathbf{A}}\Phi_f T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{f_1} + \partial\mathbf{A}_{f_1})T \\ (\mathbf{A}_{f_2} + \partial\mathbf{A}_{f_2})T \end{bmatrix} \quad (7)$$

从式(7)可以看出  $\partial\mathbf{A}_{f_1} = \partial\mathbf{A}_{f_2}$ , 因此  $d_k$  的估计值和文中假设的阵列误差无关。然后计算  $p_k, k=1, 2, \dots, K$ 。设  $\mathbf{A}_{p_1}$  和  $\mathbf{A}_{p_2}$  分别为由  $\mathbf{A}$  的第  $1, 2, \dots, 2(L-1)$  行和第  $3, 4, \dots, 2L$  行元素组成的子阵, 则有:

$$\mathbf{A}_{p_2} = \mathbf{A}_{p_1}\Phi_p \quad (8)$$

式中  $\Phi_p = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_k), k=1, 2, \dots, P$ 。按照由  $\bar{\mathbf{A}}$  构成  $\bar{\mathbf{A}}_{p_1}$  和  $\bar{\mathbf{A}}_{p_2}$  的方式将  $E_s$  划分成两个分块矩阵  $E_{p_1}$  和  $E_{p_2}$ :

$$E_s = \begin{bmatrix} E_{p_1} \\ E_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{p_1} \\ E_{p_1}\Psi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{p_1}T \\ \bar{\mathbf{A}}_{p_2}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{p_1} + \partial\mathbf{A}_{p_1})T \\ (\mathbf{A}_{p_2} + \partial\mathbf{A}_{p_2})\Phi_p T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{p_1} + \partial\mathbf{A}_{p_1})T \\ (\mathbf{A}_{p_1} + \partial\mathbf{A}_{p_2})\Phi_p T \end{bmatrix} \quad (9)$$

利用  $(\mathbf{A}_{p_1} + \partial\mathbf{A}_{p_2})$  的伪逆的一阶近似, 求得  $\hat{\Psi}_p$  的最小二乘解为:

$$\hat{\Psi}_p = T^{-1}\{\mathbf{I} + \mathbf{A}^+(\partial\mathbf{A}_{p_2} - \partial\mathbf{A}_{p_1})\}\Phi_p T \quad (10)$$

则  $\hat{\Psi}_p$  和  $\{\mathbf{I} + \mathbf{A}^+(\partial\mathbf{A}_{p_2} - \partial\mathbf{A}_{p_1})\}$  为相似矩阵, 具有相同的特征值。利用特征值的一阶扰动近似<sup>[5]</sup>,  $\hat{\Psi}_p$  的第  $k$  个

特征值为:

$$\hat{p}_k = p_k + \partial p_k \quad (11)$$

式中  $\partial p_k = p_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+ (\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1}) \mathbf{e}_k$ , “+”为求 $M$ - $P$ 伪逆,  $\mathbf{e}_k$ 为 $P \times 1$ 单位矢量, 其中, 第 $k$ 个元素为1, 而其他元素为0。

用与分析 $p_k$ 类似的方法可以得到阵列误差对 $q_k$ 和 $r_k$  ( $k=1, 2, \dots, K$ )的扰动。 $q_k$ 和 $r_k$ 的详细计算方法参见文献[4]。

$$\hat{q}_k = q_k + \partial q_k \quad \text{其中} \quad \partial q_k = q_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{q_1}^+ (\partial \mathbf{A}_{q_2} - \partial \mathbf{A}_{q_1}) \mathbf{e}_k \quad (12)$$

$$\hat{r}_k = r_k + \partial r_k \quad \text{其中} \quad \partial r_k = r_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{r_1}^+ (\partial \mathbf{A}_{r_2} - \partial \mathbf{A}_{r_1}) \mathbf{e}_k \quad (13)$$

经过配对, 每个信号的频率可以从 $\hat{d}_k$ 计算得到, 二维到达角可以从频率、 $\hat{p}_k$ 和 $\hat{q}_k$ 求得, 极化角可以从频率、二维到达角和 $\hat{r}_k$ 计算得到<sup>[4]</sup>。由于 $\hat{d}_k$ 和阵列误差无关, 频率的估计值和阵列误差无关, 因此下面分析二维到达角和极化估计的均方误差。从文献[4]得知极化参量 $\gamma_k$ 和 $\eta_k$ 分别是 $\xi_k$ 的幅度和相位, 为简便起见下面讨论阵列误差对 $\xi_k$ 的影响。将文献[4]中二维到达角和极化的表达式进行一阶Taylor级数展开<sup>[5]</sup>, 再经过计算可求得各参量的均方误差为:

$$E[\partial \theta_k^2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_k \cos \phi_k}{2\pi \delta \cos \theta_k} \right]^2 \{ E\{|\partial p_k|^2\} - \text{real}\{E[(\partial p_k)^2](p_k^*)^2\} + \text{tg}^2 \phi_k E\{|\partial q_k|^2\} - \text{tg}^2 \phi_k \text{real}\{E[(\partial q_k)^2](q_k^*)^2\} + 2 \text{tg} \phi_k (\text{real}(\frac{E(\partial p_k \partial q_k^*)}{p_k q_k^*}) - \text{real}(\frac{E(\partial p_k \partial q_k)}{p_k q_k})) \} \quad (14)$$

$$E[\partial \phi_k^2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_k \sin \phi_k}{2\pi \delta \sin \theta_k} \right]^2 \{ \frac{1}{\text{tg}^2 \phi_k} E\{|\partial q_k|^2\} - \frac{1}{\text{tg}^2 \phi_k} \text{real}\{E[(\partial q_k)^2](q_k^*)^2\} + E\{|\partial p_k|^2\} - \text{real}\{E[(\partial p_k)^2](p_k^*)^2\} + \frac{2}{\text{tg} \phi_k} (\text{real}(\frac{E(\partial p_k \partial q_k)}{p_k q_k}) - \text{real}(\frac{E(\partial p_k \partial q_k^*)}{p_k q_k^*})) \} \quad (15)$$

$$E[\partial \xi_k^2] = (\text{tg} \theta_k \xi_k)^2 E[\partial \theta_k^2] + \frac{1}{\cos^2 \theta_k} [1 + \cos^2 \theta_k \xi_k^2] E[\partial \phi_k^2] + \frac{1}{\cos^2 \theta_k (-r_k \sin \phi_k + \cos \phi_k)^4} E[\partial r_k^2] \quad (16)$$

其中:

$$E\{|\partial p_k|^2\} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+ E[(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})^H] (\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+)^H \quad (17)$$

$$E[(\partial p_k)^2] = p_k^2 \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+ E[(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})^T] (\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+)^T \quad (18)$$

$E\{|\partial q_k|^2\}$ 、 $E\{|\partial r_k|^2\}$ 和 $E\{|\partial p_k|^2\}$ 有类似的表达式, 只是矩阵 $\mathbf{A}$ 下标做相应的调整。同样  $E[(\partial q_k)^2]$ 、 $E[(\partial r_k)^2]$ 和 $E[(\partial p_k)^2]$ 也有相似的表达式, 同样把 $P$ 改为 $q$ 或 $r$ 。

$$E[\partial p_k \partial q_k] = p_k^2 \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+ E[(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})(\partial \mathbf{A}_{q_2} - \partial \mathbf{A}_{q_1})^T] (\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{q_1}^+)^T \quad (19)$$

$$E[\partial p_k \partial q_k^*] = p_k q_k^* \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{p_1}^+ E[(\partial \mathbf{A}_{p_2} - \partial \mathbf{A}_{p_1})(\partial \mathbf{A}_{q_2} - \partial \mathbf{A}_{q_1})^H] (\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_{q_1}^+)^H \quad (20)$$

以上得到了由阵列误差导致的参数估计的均方误差。从式子可以看出, 各参量估计的均方误差和ESPRIT算法中两个子阵的偏差有直接关系。即理想的ESPRIT算法中假设估计一个参量的两个子阵完全相同, 这样就保证了由阵列误差而导致的参数估计误差为零。而两个子阵存在差别的情况下将会产生参数估计误差, 且误差随着两子阵列差别的增加而增大。

### 3 计算机模拟结果

为了验证上面的分析, 在本节中进行了计算机仿真, 设阵列形式为 $L$ 阵, 阵元数 $L=5$ , 阵元间距 $\delta$ 为所估计信号中最高频率的半波长, 并假设各信号为互不相干的等功率窄带平面波信号。为叙述方便, 信号简记为 $s_k(t) = (f_k, \theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ 。设两个输入信号为 $s_1(t) = (100, 30^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 5^\circ)$ ,  $s_2(t) = (200,$

60°, 40°, 25°, 25°)。快拍数取128, 阵列误差设为零均值随机数, 方差从0开始逐渐增加, 在每一个阵列误差方差值进行100次实验。图2为信号各参数估计均方误差的理论值和实验值。

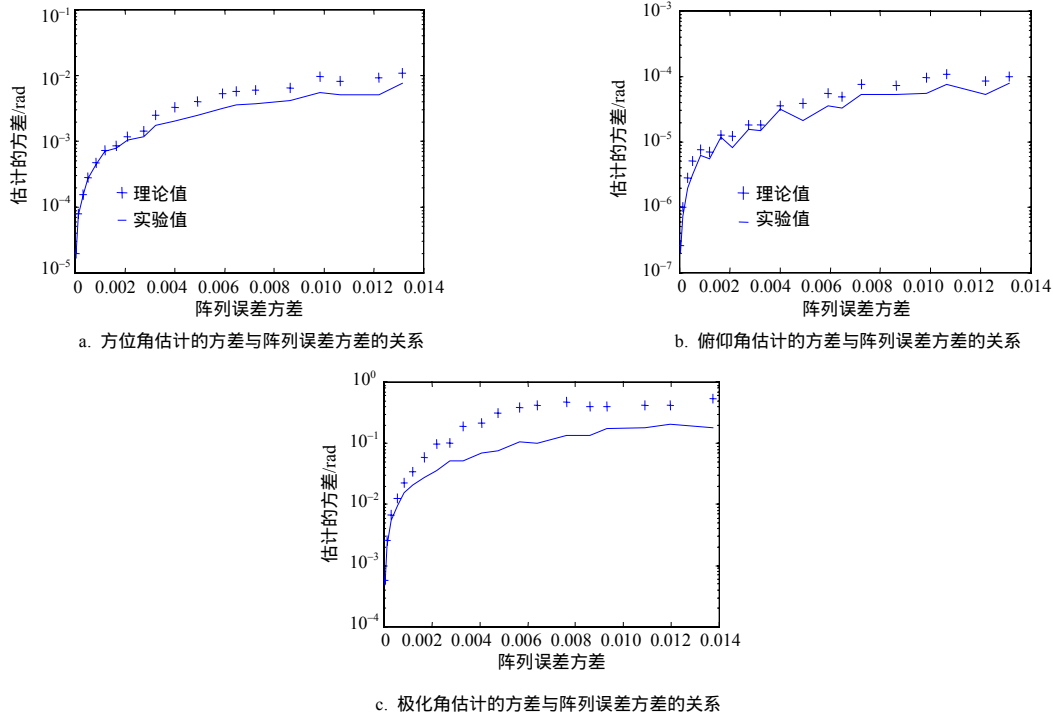


图2 参数估计的方差与阵列误差方差的关系

从上面的模拟结果可以看出, 理论计算结果和计算机模拟结果基本相符, 随着阵列误差的增加, 参数估计的方差迅速增加。且从图2可以看出, 阵列误差对俯仰角的影响较大, 对方位角的影响则较小。而对极化参量来说, 除了阵列误差的影响外, 还受到方位角和俯仰角估计的影响, 因此估计性能最差。

## 4 结束语

大多数参数估计算法均假设阵列为理想阵列, 这在实际工程应用中是不可能实现的。这些算法在阵列误差情况下性能将会下降, 甚至失效。针对这一问题, 本文在阵列误差模型下对频率、二维到达角和极化估计做了性能分析, 建立了误差阵列信号模型, 从理论上推导了各参量在阵列误差情况下估计的均方误差, 并进行了计算机模拟。分析结果表明: 随着阵列误差的增加, 参数估计的性能迅速降低。

## 参考文献

- [1] Li J, Compton R T. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array[J]. IEEE Trans. on AP, 1991, 39(9): 1376-1383.
- [2] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Trans. on ASSP, 1989, 37(7): 984-995.
- [3] Wang J Y, Chen T Q. Joint frequency, 2D AOA and polarization estimation using fourth-order cumulants[J]. Science in China(E), 2000, 43(3): 297-303.
- [4] 王建英, 陈天麒. 用L阵实现频率、二维到达角和极化的联合估计[J]. 电波科学学报, 2001, 16(1): 30-33.
- [5] Golub H, Vanloan C F. Matrix computations[M]. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1983.

编辑 刘文珍