第 35 卷　第 5 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.35　No.5
2006 年 10 月　　Journal of University of Electronic Science and Technology of China　　Oct. 2006

・计算数字・

正整数的连续奇偶拆分

郭育红[1]，张先迪[2]

(1. 河西学院数学系　甘肃 张掖　73400;　2. 电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】正整数n的一个拆分是指将n表示为一个或多个正整数的无序和。n的不同拆分方式数称为n的拆分数。给出了一个正整数n能拆分成连续奇数和连续偶数之和的充要条件，并求出了这两种拆分的拆分数。将其结果用于讨论不定方程$x^2-y^2=n$，给出了判断该方程解的存在性条件，以及解的个数的确定。证明了如果n能表示成连续奇数和连续偶数之和，则表示法唯一。

关　键　词　拆分;　拆分数;　连续奇数;　连续偶数

中图分类号　05A　　　　文献标识码　A

Partitions of Positive Integer as the Sum of Continuous Even or Odd Numbers

GUO Yu-hong[1]，ZHANG Xian-di[2]

(1. Department of Mathematics, Hexi University　Zhangye Gansu　734000;

2. School of Applied Mathematics, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China　Chengdu　610054)

Abstract　A partition of a positive integer n is representation of n as an unordered sum of one or more positive integers. The number of different partitions of the positive integer n is called the partition number of n. In this paper , a sufficient and necessary condition of the positive integer n which can be represented as a sum of some continuous even or odd numbers is given. The partition numbers of these two kinds of partitions are also obtained. These consequences are used for research the equation $x^2-y^2=n$. The condition of the equation existence solution and number of solution are given. For given n and m, we also show that if n can be represented as a sum of m continuous even or odd numbers, then the representation is unique.

Key words　partition;　partition number;　continuous even number;　continuous odd number

拆分是组合数学所讨论的问题之一，有较多的应用。下面先给出相关概念以及相关结果。

定义 1　正整数n的一个拆分是指将n表示为一个或多个正整数的无序和。n的不同的拆分方法数称为n的拆分数，记为$p(n)$。

易知正整数n的一个拆分等价于把n个无区别的球放在一些无区别的盒子中的一个方法[1]。求出$p(n)$的一般表达式是一个困难的问题。组合数学中传统的方法是利用母函数展开式。例如，设a，b，c，… 是正整数，则 $\dfrac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$ 的级数展开式中 x^n 的系数等于把正整数n拆分成a，b，c，… 的和的方法数[1]。但是对于级数展开并不是一个很容易的问题。特别地，一些带条件的拆分，如将正整数拆分成连续奇数的和以及拆分成连续偶数的和，就使问题更复杂。用母函数展开来讨论拆分数是有一定的难度的。

本文主要讨论的是正整数的一种有限制的拆分，即将正整数n拆分成几个连续奇数或几个连续偶数的拆分，给出了一个正整数能拆分成连续奇数以及连续偶数之和的充要条件，并求出了这两种拆分的拆分数。并将其结果用于讨论不定方程$x^2-y^2=n$，给出了判断其解的存在性的条件，以及解的个数的确定，讨论如下。

下面本文指的拆分均指拆分成两个或两个以上的连续奇数或偶数之和。先给出记号：$p_1(n)$表示正整数n

收稿日期：2003 - 12 - 15

作者简介：郭育红(1976 -)，女，硕士，主要从事组合数学及图论等方面的研究;　张先迪(1976 -)，男，教授，主要从事组合数学及图论等方面的研究.

拆分成连续奇数的拆分数，$p_2(n)$表示正整数n拆分成连续偶数的拆分数。

1　正整数*n*拆分成连续奇数之和

定理 1　正整数n能拆分成m个连续奇数之和的充要条件是$n = m(2q+m)$ (m是大于1的整数，q为非负整数)。若n能拆分成m个连续奇数之和，则拆分唯一。

证明

(1) 必要性。此时有：

$$n=(2q+1)+[2(q+1)+1]+\cdots+[2(q+m-1)+1]=2[q+(q+1)+\cdots+(q+m-1)]+m=$$
$$2[mq+\frac{m(m-1)}{2}]+m=m(2q+m)$$

(2) 充分性。此时有：

$$n=m(2q+m)=2qm+m^2=2qm+1+3+5+\cdots+[2(m-1)+1]=$$
$$(2q+1)+[2(q+1)+1]+\cdots+[2(q+m-1)+1]$$

(3) 唯一性。若n能拆分成两种m个连续奇数之和，设$n= q_1 +(q_1+2)+\cdots+[q_1+2(m-1)]= mq_1+[2+4+\cdots+2(m-1)]$，$n = q_2+(q_2+2)+\cdots+[q_2+2(m-1)] = mq_2+[2+4+\cdots+2(m-1)]$，且$q_1\neq q_2$，显然有$n\neq n$，矛盾。故拆分方式唯一。　证毕

推论 1　n能分拆成至少两个连续奇数当且仅当n能够分解成两个奇偶性相同的因数pq之积；其中p,q大于等于2。

例1　考虑9，42能否拆分成连续奇数之和。

解：因为$9 =3\times3=3\times(2\times0+3)$，故$9 =(2\times0+1)+(2\times1+1)+(2\times2+1)=1+3+5$。由于$42 = 6\times7 = 3\times14 = 2\times21 = 1\times42$。6与7，3与14，2与21，1与42均为一奇一偶，故42不能拆分成连续奇数之和。

1.1.1　拆分的个数

定理 2　设n为大于1的奇数且不为素数，若n的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ (其中$\alpha_i\geq0$，p_i为奇素数i=0，1，2，…，k)，则n拆分成连续奇数的和的拆分个数为：

$$p_1=\begin{cases}\dfrac{\tau(n)}{2}-1, \tau(n)\text{为偶数},\\ \dfrac{\tau(n)+1}{2}-1, \tau(n)\text{为奇数},\end{cases}\qquad \text{其中 } \tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)\ )$$

证明　因为n大于1，且不是素数，故n能分解成两个奇数d_i与$\dfrac{n}{d_i}$的乘积，所以n能分拆成连续奇数之和。由2知，当d_i 取遍n的因数时，$\dfrac{n}{d_i}$也取遍n的因数，而这里考虑的是$n=d_i\times\dfrac{n}{d_i}$，故总共有$\dfrac{\tau(n)}{2}$对乘积，但$1\times n$这种分解不在讨论之列，所以总分拆数为$\dfrac{\tau(n)}{2}-1$，其中当$n$为完全平方数时，$\tau(n)$为奇数(见文献[2]$p_6$定理6推论)。这时，设$n = r^2$，则$n$的分解中有$r\times r$，有两个数相同，为了和上面形式统一，也认为$n$的总的正因数个数为$\tau(n)+1$，故$\tau(n)$为奇数时，分拆数为$p_1(n)=\dfrac{\tau(n)+1}{2}-1$。　证毕

定理 3　设n为偶数，若n的标准分解式为 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{k}$，(其中$\alpha_0\geq1$，$\alpha_i\geq0$，$p_i$为奇素数，$i$ =0，1，2，…，k)，则n分拆成连续奇数之和的分拆个数为$p_1(n)=(\alpha_0-1)(\dfrac{\tau(n)}{2})$。

证明　由于n能分拆成连续奇数之和，要求n分解的两个因数奇偶性相同。在这种情况下，设$n =d_1d_2$，则由定理1知d_1，d_2都应为偶数，这时n分解成d_1d_2这样的乘积对数即为拆分数。又设$d_1=d_3d_4$，其中$d_3=2^{\alpha}$ ($1\leq\alpha\leq\alpha_0$)，d_4是一些素因数的积，那么d_3的取法有α_0-1种。事实上，若$d_3=2^{\alpha_0}$，则就有d_2为奇数，这时n不能拆分。又由定理2知d_4的取法为$\tau(n)/2$。所以d_1的取法为$(\alpha_0-1)\tau(n)/2)$，并产生相应的d_2的取法。故结论真。特别地，若$\tau(n)$为奇数则为$p_1(n)=\tau(n)+1/2$。　证毕。

推论 2　若$n=p^2-q^2$ ($p>q$)，则n能拆分成连续奇数之和，并且拆分数$p_1(n)$为方程$x^2-y^2=n$的正整

数解的个数。

证明 因$n=p^2-q^2$，而$p^2=1+3+\cdots+(2p-1)$，$q^2=1+3+\cdots+(2q-1)$，故$n=(2q+1)+(2q+3)+\cdots+(2p-1)$。当然这里将$n$表示成多少组不同的$(p，q)$，就确定了不同的拆分。也即方程$x^2-y^2=n$的正整数解的个数就是拆分数。 证毕

于是，本文可以将不定方程$x^2-y^2=n$ (n为给定的正整数，$x>y$)的求正整数解的问题转化为n能否拆分成连续奇数之和的问题。并且n对于不同的拆分就产生了该方程的一组正整数解。故有如下与推论2平行的推论：

推论 2 对不定方程$x^2-y^2=n$(n是正整数，$x>y$)，当n能拆分成连续奇数之和时，该方程有解，且解数为$p_1(n)$

2 正整数*n*拆分成连续偶数之和

类似可考虑 n拆分成连续偶数之和，这里也指两个或两个以上偶数之和，有下面的定理。

定理 4 正整数n能拆分成m个连续偶数之和的充要条件是$n=m[(2q-1)+m]$。若n能拆分成m个连续偶数之和，则拆分唯一。

证明

(1) 必要性 有：

$$n=2q+2(q+1)+\cdots+2(q+m-1)=2mq-m+m^2=m[(2q-1)+m]$$

(2) 充分性 有：

$$n=m[(2q-1)+m]=m(2q-1)+1+3+\cdots+[2(m-1)+1]=2q+2(q+1)+\cdots+2(q+m-1)$$

唯一性的证明同定理1。 证毕

推论 3 n能拆分成至少两个连续偶数当且仅当n能够分解成两个奇偶性相异的因数pq之积；其中p，q大于等于2。

推论3说明只有偶数才可能拆分成连续偶数之和。但在偶数中只有2^{α} ($\alpha>1$)不能拆分成连续偶数之和，这是由于2^{α}分解成的两个因数同为偶。

定理 5 设偶数n的标准分解式为$n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ (其中$\alpha_0>0$，$\alpha_i\geq 0$且不全为0，p_i为奇素数，$i=1$，2，…，k)，则n拆分成连续偶数之和的拆分数为$p_2(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)-1$。

证明 设$n=d_1\times d_2$，则d_1，d_2必一奇一偶才能将n分拆成连续偶数之和，即2^{α_0}要么在d_1中，要么在d_2中，二者必居其一，又$n/2^{\alpha_0}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$的正因数个数为$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$。为简明起见，设$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=d_3\times d_4$，则$d_3$取遍$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$的正因数，$d_4$也取遍$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$的正因数，得到$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$对乘积，设$d_1=2^{\alpha_0}d_3$，$d_2=d_4$，$n=2^{\alpha_0}d_3\times d_4$，这时$2^{\alpha_0}d_3$与$d_4$一奇一偶，故每一对均能拆分。若设$d_1=2^{\alpha_0}d_4$，则与刚才的结果完全相同；又因为这里包括了$1\times n$这种情况，故$n$能分拆成连续偶数之和的拆分数为$p_2(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)-1$。 证毕

例2 试分析1 500可否拆分成连续偶数之和，若能，写出拆分结果。

解 $1\,500=2^2\times3\times5^3$，故拆分个数为$p_2(1\,500)=2\times4-1=7$个。因为：

$$1\,500=(2^2\times3)\times5^3=(2^2\times5^3)\times3=(2^2\times3\times5^2)\times5=(2^2\times3\times5)\times5^2=(2^2\times5)\times(3\times5^2)=(2^2\times5^2)\times(3\times5)=2^2\times(3\times5^3)$$

所以有：

$$1\,500=114+116+\cdots+136=498+500+502=296+298+300+302+304=36+38+\cdots+84=$$
$$56+58+\cdots+94=86+88+\cdots+114=372+374+376+378$$

参 考 文 献

[1] 孙世新. 组合数学[M]. 第3版. 成都: 电子科技大学出版社, 2003.
[2] 徐兆强. 初等数论[M]. 兰州: 甘肃教育出版社, 1999.

编 辑 刘文珍