

用傅里叶变换分析圆孔夫琅和费衍射

张世富

(西南科技大学信控学院 四川 绵阳 621010)

【摘要】从傅里叶变换出发,推导了高斯光束圆孔衍射的解析解,与平行光在相同情况下的结果进行了比较,利用计算机数值计算绘出了两种情况下的光强分布曲线,通过比较发现,当满足圆孔半径 $a^2 \ll ww_0$ 的条件下,高斯光束和圆孔夫琅和费衍射结论可用平行光圆孔夫琅和费衍射近似,其结果仅仅是忽略了精确解中 $n=2$ 的高次项。

关键词 傅里叶变换; 高斯光束; 圆孔; 夫琅和费; 衍射
中图分类号 TN913 文献标识码 A

Fourier to Analysis of Frounhofer Diffraction by a Circular Aperture

ZHANG Shi-fu

(School of Information and Control Engineering, Southwest University of Science and Technology Mianyang Sichuan 621010)

Abstract The analytical solution to the Frounhofer diffraction of Gaussian beam by a circular aperture is inferred and is compared with the result from the parallel beam. Due to the results of the numerical computation, the distributing curves of light intensity are drawn in the two instances. After the comparison between of the two curves, a conclusion is drawn that when the circle aperture radius $a^2 \ll ww_0$ the result of Gaussian beam's Frounhofer diffraction is approximate to parallel beam's Frounhofer diffraction. The difference is produced because of ignoring the terms with high degree which $n=2$ in the analytics solution.

Key words Fourier transfer; Gaussian beam; circle aperture; Frounhofer; diffraction

由于激光的单色性好、亮度高、方向性好,常被用作光学实验的光源。而光学仪器的光瞳又多是圆形,因此高斯光束照射下的圆孔衍射是光学实验中经常遇到的问题。He-Ne激光束为高斯分布,处理其衍射问题的计算较为复杂,一般多借用平行光垂直入射到圆孔衍射屏的夫琅和费衍射的结论,但实践中又发现有一定偏差。本文用二维傅里叶变换推导了高斯光束经圆孔的夫琅和费衍射的解析解,并通过计算机模拟,画出了光强分布曲线,比较高斯光束和平行光分别经圆孔衍射后的结果。

1 用傅里叶变换分析高斯光束圆孔衍射

设衍射圆孔所在平面坐标为 (x, y) ,接收屏平面坐标为 (ξ, η) ,单色振幅的高斯光束垂直入射到圆孔上,当圆孔尺寸与屏幕距离满足夫琅和费近似的条件下,衍射光的复振幅为:

$$u(x, y) = \frac{\exp(jkz) \exp\{jk[(\xi^2 + \eta^2)/(2z)]\}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \exp[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)] dx dy \quad (1)$$

式中 $U_0(x, y)$ 表示圆孔后表面的光场分布。式(1)和傅里叶变换有着直接的关系^[1],因此,夫琅和费衍射问题完全可用傅里叶变换分析。单位高斯光束复振幅为:

$$U(x, y) = \exp\{-(x^2 + y^2)/w^2\} \exp\{-ik[(x^2 + y^2)/(2r)]\} \quad (2)$$

式中

$$w = w_0(1 + \frac{z^2}{z_r^2})^{1/2}, \quad r' = z(1 + \frac{z^2}{z_r^2}), \quad z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (3)$$

式中 w_0 为高斯光束的束腰; z 为高斯光束束腰到衍射屏的距离; z_r 为瑞利距离; w, r' 为高斯光束在衍射屏处的两个参数。考虑到衍射屏的形状,在 (x, y) 和 (ξ, η) 平面上分别取极坐标 (ρ, φ) 和 (r, ϕ) 进行坐标代换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & y = \rho \sin \varphi, & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \xi = r \cos \theta, & \eta = r \sin \theta, & r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{cases} \quad (4)$$

得到衍射圆孔的透过率函数为：

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad (5)$$

式中 a 为圆孔半径。当单位振幅的高斯光束垂直入射到圆孔上，衍射屏后表面的复振幅函数为：

$$U(\rho, \varphi) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) \exp(-jk \frac{\rho^2}{2r}) \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (6)$$

对式(6)作傅里叶变换得：

$$u(r) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) \exp(-ik \frac{\rho^2}{2r}) \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\varphi - \phi)] \rho d\rho d\varphi \quad (7)$$

利用

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-i2\pi r \rho \cos(\varphi - \phi)] d\varphi = J_0(2\pi r \rho) \quad (8)$$

式中 $J_0(2\pi r \rho)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。将式(8)代入式(7)得：

$$U(r) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(2\pi r \rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) \exp(-jk \frac{\rho^2}{2r}) \text{circ}\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho \quad (9)$$

式(9)为傅里叶-贝塞尔变换。令 $v = \rho/a$ ，代入式(9)有：

$$U(r) = 2\pi \int_0^1 J_0(2\pi r a v) a v \exp\left(-\frac{a^2 v^2}{w^2}\right) \exp(-ik \frac{a^2 v^2}{2r}) a dv \quad (10)$$

为计算简便，再作代换：

$$1/\tau^2 = (1/w^2) + (ik/2r) \quad (11)$$

$$2\pi r a v = u \quad (12)$$

于是式(10)改写为：

$$U(r) = 2\pi \int_0^{2\pi r a} \frac{u}{2\pi r} \exp\left[-\frac{u^2}{(2\pi r)^2 \tau^2}\right] J_0(u) \frac{du}{2\pi r} \quad (13)$$

利用贝塞尔函数的递推关系：

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x) \quad (14)$$

对式(13)重复地进行分部积分，最终得到：

$$U(r) = \pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2\pi r a)^n} \left| \frac{a^2}{\tau^2} \right|^{(n-1)} J_n(2\pi r a) \exp\left(-\frac{a^2}{\tau^2}\right) \quad (15)$$

利用变换式(11)及式(4)可得：

$$\left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2r}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{w^2}\right)^2 + \frac{k^2}{4r^2}}\right)^{n-1} e^{i(n-1)\phi} = \left(\frac{1}{ww_0}\right)^{n-1} e^{i(n-1)\phi} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15)并利用光强与振幅的关系，可求出接收屏上任一点的光强为：

$$I(\rho) = U(r)U^*(r) = \left[\pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{ww_0}\right)^{n-1} \frac{2^n}{(2\pi r a)^n} J_n(2\pi r a) \exp\left(-\frac{a^2}{w^2}\right)\right]^2 \quad (17)$$

2 平行光束垂直入射圆孔的夫琅和费衍射傅里叶分析^[2]

将入射光束改为单位振幅的平行光，利用傅里叶变换，可得接收屏上任一点的复振幅表达式为：

$$U(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) \exp[i2\pi r(x\xi + y\eta)] dx dy \quad (18)$$

利用变换关系式(4)和式(8)，容易得到：

$$U(r) = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi r a} \frac{\rho}{2\pi r} J_0(\rho) \frac{d\rho}{2\pi r} = \pi a^2 \frac{2J_1(2\pi r a)}{2\pi r a} \tag{19}$$

则接收屏上的光强分布为：

$$I(r) = U(r)U^*(r) = (\pi a^2)^2 \left[\frac{2J_1(2\pi r a)}{2\pi r a} \right]^2 \tag{20}$$

3 光强分布曲线

He-Ne激光波长 $\lambda=6.328 \times 10^{-7} \text{ m}$ ，令 $z_r = z_f$ ，圆孔半径分别取 $a=0.2 \text{ mm}$ 、 $a=0.4 \text{ mm}$ ，根据式(20)和式(17)，利用数值计算结果绘出的衍射光强的分布及第一零点位置放大的曲线分别如图1、2所示。其中用式(17)时，只算到第8阶贝塞尔函数。图1中， $a=0.2 \text{ mm}$ ；图2中， $a=0.4 \text{ mm}$ 。

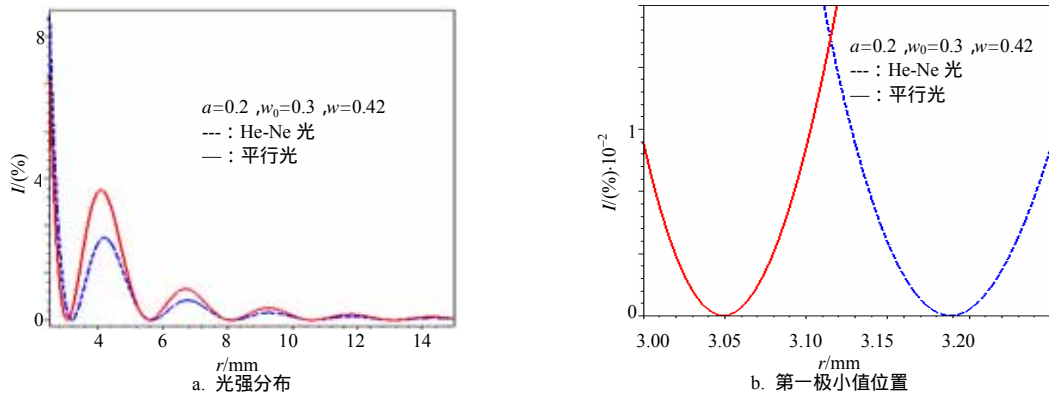


图1 $a=0.2 \text{ mm}$ 时，衍射光强分布及第一极小值位置曲线

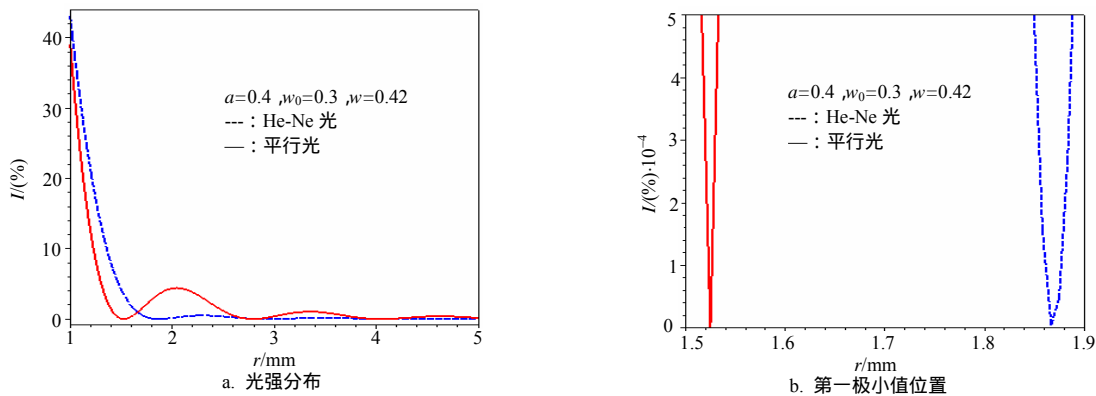


图2 $a=0.4 \text{ mm}$ 时，衍射光强分布及第一极小值位置曲线

4 讨论

1) 比较式(20)和式(17)，可见两种入射光情况下圆孔衍射的光强分布表达式差别很大。计算机模拟的结果也证实了这点。但在衍射孔半径 $a^2 \ll w w_0$ 的条件下，可忽略式(17)中 $n=2$ 的高阶项，式(17)简化为式(20)。

2) 由光强分布曲线可见，当孔半径较小时，两种情况下光强分布曲线的外形很非常相似。因此在孔径较小时，可用平行光的夫琅和费衍射近似高斯光束的衍射。但应注意：(1) 高斯光束经圆孔衍射后，衍射零点位置较平行光经圆孔衍射后相应级次零点位置偏大；(2) 随圆孔半径增大，高斯光束相应衍射级次的光强较同级次平行光的衍射光强低；(3) 随圆孔半径增大，衍射条纹也不如平行光的衍射条纹清晰。(4) 由于夫琅和费衍射的积分公式和二维傅里叶变换的直接关系，傅里叶变换是处理夫琅和费衍射问题的有力工具。

参 考 文 献

[1] 黄婉云. 立叶光学教程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
 [2] 刘忠魁, 黄海清. 夫琅和费圆孔衍射的傅里叶分析法[J]. 纺织高校基础科学学报, 2002, 15(1): 732-734.