

## 基于NURBS的复杂域边界单元改进方法

于亚婷, 杜平安, 王振伟

(电子科技大学机械电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】**提出了基于非均匀有理B样条(NURBS)理论的边界单元改进方法。该方法以原分网后的节点和单元数据为依据,按照平均取值的原则获取边界单元边界边上的控制点,根据这些控制点利用NURBS理论表示边界边,并可通过不断调节权因子,使分网后的边界更加接近真实边界。最后以VC++为平台,通过算例验证了该改进方法的有效性,并推导了改进后边界单元的形函数。

**关键词** 非均匀有理B样条; 复杂域; 边界单元; 改进方法; 分网  
**中图分类号** TP391.7 **文献标识码** A

## An Improvement on Boundary Elements of Complicated Domain Based on NURBS

YU Ya-ting, DU Ping-an, WANG Zhen-wei

(School of Mechatronics Engineering, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, an improved meshing approach is proposed to improve the precision of boundary elements of the complicated domains. According to the approach, a complicated domain is meshed by the free-meshing strategy firstly, and the information of elements and nodes is generated automatically. Based on the elements and nodes information, the control points can be determined, which are used to represent the edge of boundary element by Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) curves. The element edges represented by NURBS can be more closed to the actual boundary by adjusting the power factors appropriately. Then, the shape functions of the improved boundary elements are deduced. Finally, an example validates the improvement is effective, and demonstrates the effect of power factors on NURBS curves.

**Key words** non-uniform rational B-spline; complicated domain; boundary elements; improvement; meshing

有限元法(Finite Element Method, FEM)作为最有效的数值方法之一,已成功用于解决许多工程问题。有限元模型的建立,是进行有限元分析(Finite Element Analysis, FEA)的前提和基础。分网又是有限元建模中最耗时的环节,是有限元分析的关键,它对计算精度、计算规模等都会产生较大的影响。

为满足功能或性能要求,工程中存在大量由曲面和曲线组成的区域——复杂域组成的产品,如汽车覆盖件、车架、桥架等。这些复杂域能很好地满足产品性能和外观要求,但同时也给工程分析带来一定难度,主要体现在分网的精度上。

目前,在分网中,三角形单元应用较为广泛,但有些工程问题需要采用四边形单元。与三角形单元相比,四边形单元的数据输入和对输出应力的解释更容易,但不能很好地表达复杂域的实际边界,精度不能保证<sup>[1]</sup>。为解决该问题,可采用减小单元尺寸或提高单元阶次的方法来提高精度。但这些方法会使节点和单元数成倍增加,对计算机性能要求较高。

针对以上问题,本文提出了基于非均匀有理B样条(Non-Uniform Rational B-Spline, NURBS)的复杂域边界单元的改进方法。

收稿日期: 2004-08-26

基金项目: 四川省学术带头人培养基金资助项目(2200104)

作者简介: 于亚婷(1979-),女,博士生,主要从事CAE和有限元法的应用方面的研究。

## 1 NURBS基本理论

NURBS方法,是目前最佳的曲线、曲面造型方法。由于它能够精确描述包括二次曲线在内的各种曲线,无论是解析形状还是自由格式形状均有统一的表示参数,便于工程数据库的存取和应用,并可通过控制点和权因子方便地对曲线、曲面的形状进行局部调整。

NURBS的提出,是为了将所有空间曲线、曲面用统一数学形式描述。国际标准组织(ISO)继美国的PDES后,于1991年颁布了关于工业产品数据交换的STEP国际标准,把NURBS作为定义工业产品几何形状的唯一数学方法。

NURBS对曲线的数学定义为:已知空间 $n+1$ 个点 $d_i$ , ( $i=0,1,\dots,n$ ),则一条 $k$ 次NURBS曲线可表示为分段有理多项式矢函数:

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(u)} \quad u \in [u_k, u_{k+1}] \quad (1)$$

式中  $d_i$ 为控制点,  $i=0,1,\dots,n$ ;  $w_i$ 为相应控制点的权因子(Weight Factor),  $i=0,1,\dots,n$ ;  $N_{i,k}(u)$ 为 $k$ 次B样条基函数;  $[u_0, u_1, \dots, u_{n+k}]$ 为曲线节点矢量。

## 2 复杂域边界单元的改进

### 2.1 复杂域边界单元改进思想

采用一般四边形分网方法得到边界单元如图1所示。图中 $i$ 、 $j$ 为边界单元与复杂域边界的交点;  $p(u)$ 为分析域边界的NURBS表示,  $i$ 点、 $j$ 点坐标分别为  $p(u_i)$ 、 $p(u_j)$ 。采用平均取值的方法,在边界边上的  $p(u_i)$  和  $p(u_j)$  间取 $m$ 个控制点,即  $d_0 = p(u_i)$ ,  $d_{m-1} = p(u_j)$ ,  $d_j = p(u_i + ((u_j - u_i)/m)j)$ 。用式(1)表示边界单元的边界边。

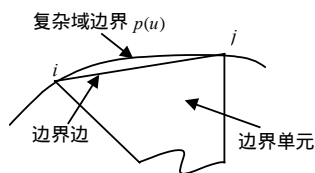


图1 边界单元示意图

为保证在公共节点处连续,取首末权因子为  $w_0 = w_{m-1} = 1$ ,其余的权因子  $w_i \in [0, +\infty]$  可取不同的值。当  $w_i$  取值适当时,边界单元边界边将在控制点处与边界实现最佳逼近。控制点越多,逼近程度越好。同时,为保证NURBS曲线不

出现奇异,  $w_i$  取值不小于0。

### 2.2 边界单元、节点信息表达

每种分网方法都有数据结构和数据库,以及存储单元和节点的相关信息,如节点坐标、节点号、单元号等。从数据库中提取网格的总数量,设为 $N$ ,则可按算法1提取边界单元和节点的相关信息,并假设单元边数为 $M$ ,且边界单元已经过初步处理,如切割和缝合等。

算法1:

```
for(i=0; i<N-1; i++)
{for(j=0, j<=M-1; j++)
if(第j条单元边被边界切割)
k++;
if(k==2)
{第i个单元为边界单元;
提取该单元和节点信息;
s1++;}
```

算法2:

```
for(i=0; i<=s2-1; i++)
{for(j=0; j<=m-1; j++)
d_j = p(u_i + ((u_j - u_i)/m)j);
p_i(u) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^m w_i N_{i,k}(u)};
```

在算法1中 $k$ 为计数器;  $M$ 值可取3或4;  $s_1$ 为计数器,对边界进行重新编号。在算法2中,  $s_2$ 为边界单元的数目,  $d_j$ 为边界单元边界边上的控制点,  $m$ 为控制点数。

### 2.3 NURBS表示的实现

以图1所示单元为例,该单元的节点信息可通过算法1得到,即节点 $i$ 和 $j$ 的坐标已知;又因为 $i$ 、 $j$ 是边界上的点,所以 $i$ 、 $j$ 的坐标满足边界的NURBS表示。可通过反求来获得节点 $i$ 、 $j$ 所对应的 $u$ 值,具体实现如算法2所示。

### 3 算例

以图2所示1/4单位圆面为例,对提出的复杂域边界单元改进思想进行说明。并以VC++为平台,实现各种求解功能和复杂域边界及边界单元边界边的NURBS表示和显示。对复杂域边界和边界单元边界边都采用二次NURBS方法表示,其数学描述为:

$$p = p(u) = \frac{(1-u)^2 w_0 b_0 + 2u(1-u)w_1 b_1 + u^2 w_2 b_2}{(1-u)^2 w_0 + 2u(1-u)w_1 + u^2 w_2} \quad (2)$$

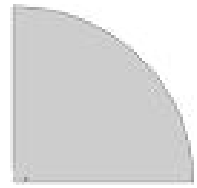


图2 1/4单位圆面

#### 3.1 圆弧曲面的NURBS表示

因为圆弧的NURBS表示不是本文阐述的重点,其详细叙述见参考文献<sup>[1,3]</sup>。取圆弧端点及其切线的交点作为控制节点,即取 $b_0(1,0)$ 、 $b_1(1,1)$ 、 $b_2(0,1)$ ,相应的权因子 $w_0=w_2=1$ , $w_1=\sqrt{2}/2$ 。用二次NURBS表示该圆弧。

#### 3.2 用四边形单元划分网格

利用自动分网方法对图2平面划分网格,结果如图3a所示。图3b为边界单元5,其节点信息由系统自动生成,如表1所示。

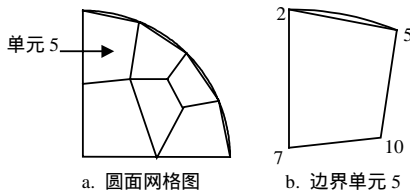


图3 圆面网格图及边界单元5

表1 边界单元5的节点信息

单元号	节点	X坐标	Y坐标
5	2	0.000 00	1.000 00
	5	0.382 68	0.923 88
	7	0.000 00	0.500 00
	10	0.322 14	0.535 24

#### 3.3 采用NURBS方法改进

从图3可看出,在网格图中有4个边界单元。为说明问题,取出单元5作研究对象。该单元包含2、5、7、10四个节点,其中节点2、5是单元与复杂域边界的交点。四个节点的节点信息如表1所示。因为复杂域边界是用二次NURBS表示的,所以将节点2、5的坐标带入式(2)就可求得 $u_2=1$ 、 $u_5=0.740 1$ ,则 $u_2 + (u_5 - u_2)/2 = 0.870 05$ 。然后取节点2、5和点 $p(0.870 05)$ 作为控制点,即 $b_{50}(0.382 68, 0.923 88)$ 、 $b_{51}(0.189 318, 0.981 916)$ 、 $b_{52}(0.000 00, 1.000 00)$ ,取 $w_0=w_2=1$ 。 $w_1$ 取不同的值,对比改进前后的结果,如图4所示。

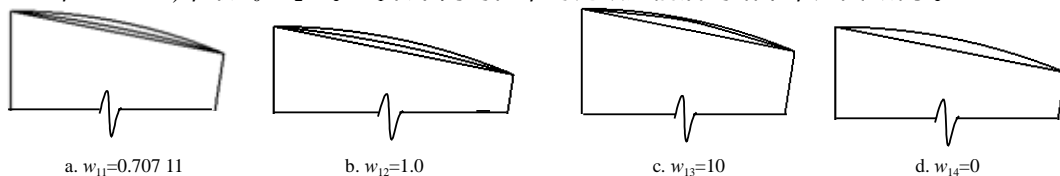


图4 改进结果及 $w_1$ 对NURBS曲线的影响

在图4中,节点2、5为三条边的端点,最里边的直线是采用一般分网方法生成的边界边,最外边的弧线是用NURBS表示的复杂域边界在节点2、5间的部分,中间弧线是以节点2、5为端点的NURBS曲线。从图4中可看出,当 $w_1$ 取值不同时,NURBS曲线与边界的逼近程度不同,随着 $w_1$ 的增大,NURBS曲线与边界的逼近程度就越高。但是当 $w_1$ 增加到10后,NURBS曲线变化就不明显了。

#### 3.4 结果分析

根据以上的改进结果,可计算出单元5未改进前的面积为 $A_1=1 532.02$ ,单元5与实际边界包围的面积为 $A_0=1 622.09$ ,改进后单元5的面积为 $A_2=1 613.47$ 。采用一般的分网方法精度为 $A_1/A_0=94.5\%$ ,改进后的精度为 $A_2/A_0=99.5\%$ ,精度提高了5%。

从图4可看出,只有当 $w_1=0$ 时,NURBS曲线才会与节点2、5间的直线重合,在其他情况下,NURBS曲线都比直线节点2、5更加逼近边界,且当 $w_1=10$ 时,曲线边界近似为由三个控制点依次连接组成的折线。因此,选取的控制点越多,精度就越高。

## 4 单元改进后形函数的确定

在给定问题的有限元分析中,决定性的步骤之一是选择适当的单元和形函数<sup>[1]</sup>。利用NURBS改进边界单元后,确定其形函数就成为首要解决的问题。用任意四边形单元划分网格可获得较高精度,但单元边界上的位移不呈线性分布,不能由节点位移唯一确定,所以采用等参单元来求解任意四边形单元的形函数<sup>[1]</sup>。

令开始时只有4个角节点,其形函数可利用双一次Lagrange多项式构造,即 $\hat{N}_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0) + (1 + \eta_0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。

其中,  $\xi_0 = \xi_i \xi$ ,  $\eta_0 = \eta_i \eta$ ,  $\xi_i$ 、 $\eta_i$ 为节点在自然坐标系( $\xi$ - $\eta$ 坐标系)中的坐标。

通过第3.4节算例分析可得到如下结论:当 $w_1$ 取值合适时,就可选取改进后边界边上的控制点作为新节点。假设边界上增加一个节点,则它对应的形函数可表示成 $\xi$ (或 $\eta$ )方向二次和 $\eta$ (或 $\xi$ )方向一次Lagrange多项式的乘积,则 $N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + (1 - \eta)$ 。对于5个节点的情况, $N_5$ 满足 $N_{5j} = \delta_{5j}$ ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ )要求,但需对 $\hat{N}_1$ 和 $\hat{N}_2$

作如下修正: $N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5$ ,  $N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_5$ 才能满足要求。因此边界边增加一个节点的四边形单元的形

函数为: $N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5$ ,  $N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_5$ ,  $N_3 = \hat{N}_3$ ,  $N_4 = \hat{N}_4$ ,  $N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + (1 - \eta)$ , 且 $\sum_{i=1}^5 N_i = 1$ 。

对用NURBS表示的 $m$ ( $m > 2$ )次边界单元边界边,可采用相同的方法构造它的形函数,其形函数可表示成 $\xi$ (或 $\eta$ )方向 $m$ 次和 $\eta$ (或 $\xi$ )方向一次Lagrange多项式的乘积。

## 5 结 论

(1) 目前的边界单元只能用直线或二次抛物线去逼近复杂域边界,而采用改进后的单元可通过改变权因子和控制点数来控制边界单元的形状,使其与边界逼近得更好。特别是曲线的二次NURBS表示,将两个单元节点权因子固定为1,通过调整 $w_1$ 就可获得不同的曲线;(2) 按照提出的改进方法,在单元内部边上节点数不增加的情况下,只需增加边界边节点数就可获得满意精度,而且可实现不同节点单元间的过渡。

### 参 考 文 献

- [1] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- [2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] 韩明, 孔亚洲. 圆弧曲线的二次NURBS表示方法研究[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(12): 37-39.
- [4] 陈绍平, 陈宾康. 二次NURBS曲线下面积的精确计算公式[J]. 武汉理工大学学报, 2001, 25(1): 87-90.

编辑 孙晓丹

(上接第972页)

## 4 结 论

将数字化频域滤波技术应用于计算机全息图中,可根据需要将零级像及孪生像消除,从而得到单一的清晰实像或虚像。该方法同时也适用于其他类型的计算全息图,如黄氏型、李威汉型修正离轴参考光计算全息图、计算全息干涉图的数字化频域滤波操作,并可通过计算机数值再现获得单一的清晰图像。该方法实现了全息图设计、制作、处理和再现全过程的数字化,可有效改善光学全息技术中对硬件设备条件的苛刻要求及全息干版后处理过程中的非线性等因素对全息图可靠性的影响,具有计算速度快、灵活性强、操作简便、可靠性好、再现图像质量高等优点。

### 参 考 文 献

- [1] 郭永康, 朱建华, 王磊, 等. 光学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 286.
- [2] 吕且妮, 葛宝臻, 张以谟. 数字离轴全息实验系统及其零级像分析[J]. 天津大学学报, 2005, 38(8): 701-705.
- [3] Yamaguchi I, Zhang T. Phase-shifting digital holography[J]. Opt. Lett., 1997, 22: 1268-1270.
- [4] Cuhe E, Marquet P, Depeursinge C. Spatial filtering for zero-order and twin-image elimination in digital off-axis holography[J]. Appl. Opt., 2000, 39(23): 4070-4075.
- [5] 王仕墀, 朱自强. 现代光学原理[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 2000: 99-100.
- [6] 虞祖良, 金国藩. 计算机全息图[M]. 北京: 清华大学出版社, 1984: 48-50.

编辑 孙晓丹