

# 信号相关性与DOA估计

熊波<sup>1</sup>, 李国林<sup>1</sup>, 尚雅玲<sup>1</sup>, 高云剑<sup>2</sup>

(1. 海军航空工程学院兵器科学与技术系 山东 烟台 264001; 2. 海装上海局 上海 虹口区 200081)

**【摘要】**窄带波达方向(DOA)估计模型中,相干信号的问题很容易引起混淆。一些文献简单地认为频率不同的信号是不相干的,而频率相同的信号就是相干信号。因此,在建立不相干信号的DOA估计模型时,采用不同中心频率的信号,而使用的方向矩阵却采用同一个信号频率,该文提出,当信号中心频率不同时,应采用各自相应的频率来建立方向矩阵。其DOA估计应采用宽带信号的DOA估计方法,也就是应该对不同的频率进行聚焦。而采用同一个频率来建立的方向矩阵恰好同聚焦后的信号模型相同,因此,其估计结果也就是正确的。但这样的信号模型与事实并不相符。该文严格按照相干信号的定义证明了只有频率和初始相位都相同的窄带信号才是相干信号,最后通过计算机仿真验证了这一点。

**关键词** 中心频率; 相干信号; 方向矩阵; DOA估计  
**中图分类号** TN911.23 **文献标识码** A

## Signal Correlation and DOA Estimation

XIONG Bo<sup>1</sup>, LI Guo-lin<sup>2</sup>, SHANG Ya-ling<sup>1</sup>, GAO Yun-jian

(1. Department of Armament Science and Technology, NAEI Yantai Shandong 264001;

2. Military Representatives Office of Navy Armament Ministry in Shanghai Hongkou Shanghai 200081)

**Abstract** In the model of Direction-Of-Arrival (DOA) estimation of narrowband signals, the concept of coherent signals seem more confused. In some published references, the signals of different frequency were simply considered as incoherent, whereas those of same frequency as coherent signals. So, those publications adopted the signals of different frequency to build the DOA estimation model of incoherent signals but the same center frequency in its directional matrix. This is considered unadvisable in this paper. If the center frequencies of the signals are different, the directional matrix should be built with correspond frequency of each signal source. The DOA should be estimated by the method for wideband signals, i.e., the different frequency should be gathered. The directional matrix built with the same center frequency is fitly the same as that of the gathered model. In result, its estimation result is correct, but the signal model does not match the fact. According to the strict definition of coherent signal, this paper proves that only the signals of the same frequency and original phase are coherent. Our conclusion is validated by computer simulation.

**Key words** center frequency; coherent signals; directional matrix; DOA estimation

传统的窄带波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计方法可以分为:波束形成的方法和超分辨率分析的方法。这些方法都是以空间角为自变量来分析DOA的空间分布,所以又称为“空间谱”分析方法。波束形成的方法主要包括Bartlett波束形成器和Capon波束形成器;超分辨率分析方法主要包括多重信号分类(MUSIC)方法<sup>[1]</sup>、极大似然估计和旋转不变技术(ESPRIT)<sup>[2]</sup>。这些方法都是基于协方差矩阵进行DOA估计的,在协方差矩阵秩亏缺的情况下,无法正确进行估计。本文只讨论窄带不相干信号的DOA估计问题,这也是DOA估计中最基本的问题。

宽带信号的DOA估计也可以转化为窄带信号的DOA估计问题<sup>[3-5]</sup>。

按照相关性的定义,两个信号的相关程度依次可分为不相关、相关和相干三种情形。文献[6]明确指出相关系数为1的信号才是相干信号,而相关系数不为1的信号不会引起协方差矩阵的秩亏缺。很显然,频率不同的窄带信号是不相关的,而频率相同的信号可能是相关的,也可能是相干的。很多文献没有对此进行严格区分,认为不相干的信号就是频率不同的信号,而频率相同的信号就是相干信号。如文献[7]认为一个窄带信号和它自身的延迟信号是

收稿日期:2006-12-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(90207016)

作者简介:熊波(1975-),男,博士生,主要从事无线电引信信号侦察识别方面的研究。

相干的。文献[8]也混淆了相关信号和相干信号的概念。文献[9]中,有一个完整的DOA估计程序,包括Capon波束形成器和MUSIC方法,其方向矩阵采用相同的中心频率,而各个信号的频率却不相同。尽管其DOA估计结果是正确的,但信号模型与现实的阵列信号是不相符的。几个不同频率的窄带信号已经构成了宽带信号,其DOA估计方法也应该按照宽带信号的DOA估计方法来进行。事实上,出现这种模型错误而结果正确的原因正是由于宽带信号可以进行频域的平滑处理,也就是频率聚焦。错误的模型与频率聚焦后的结果一致,而不是通过阵列天线直接得到的原始信号。

本文通过严格的数学推导和计算机仿真,验证了频率相同而初相不同的相关信号不会引起协方差矩阵的秩亏缺,完全可以通过常规的方法进行DOA估计。只有频率和初始相位都完全相同的窄带信号才是相干信号,也只有相干信号才会引起协方差矩阵的秩亏缺。

## 1 信号相关性分析

### 1.1 相关性分析

两个信号  $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$  的相关程度由相关系数  $r$  衡量,其定义为:

$$r = \frac{\text{cov}(s_1, s_2)}{\sqrt{D(s_1)D(s_2)}} = \frac{E\{[s_1 - E\{s_1\}][s_2 - E\{s_2\}]\}}{\sqrt{E\{[s_1 - E\{s_1\}]^2\}E\{[s_2 - E\{s_2\}]^2\}}} \quad (1)$$

当  $r=0$  时,信号不相关;当  $0 < r < 1$  时,信号相关;当  $r=1$  时,信号相干。

按照定义,很容易得到如下结论:

- (1) 频率不相同的信号是不相关的。
- (2) 同频但初相不同的信号是相关的。不包括特殊情况:初相相差  $\pm\pi/2$  时,信号不相关;初相相差  $\pm\pi$  时,信号相干。
- (3) 频率和初相都相同的信号是相干的。

综上所述,几个同频的窄带信号既可能不相关,也有可能相关,还可能是相干的,相关程度取决于信号的初始相位。而频率不同的几个窄带信号一定是不相关的。

### 1.2 协方差矩阵分析

在阵列信号中,同样假设有两个信号源  $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$ ,其矩阵形式为  $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$ ,则其协方差矩阵为:

$$R = S * S' = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} * [s_1 \ s_2] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

显然,若信号  $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$  相干,则  $r_{12} = r_{21} = 1$ ,将引起协方差矩阵的秩亏缺。而两个信号相关时,协方差矩阵的行列式并不等于0,所以不会引起矩阵的秩亏缺。当然,相关系数接近1时,协方差矩阵接近奇异。

## 2 不相关窄带信号的DOA估计

### 3.1 不相关窄带信号的阵列模型

如前所述,频率不相同的信号是不相关的。文献[9]在对几个频率不同的信号建立模型时,方向矩阵采用了相同的频率。本文认为这与实际阵列信号不符,方向矩阵应该采用各自不同的频率来建立。

假设每个信源的频率为  $f_i (i=1, 2, \dots, N)$ ,对应的波长为  $\lambda_i = c / f_i$ ,其中  $c$  为光速。

则方向矩阵为:

$$A_1 = [a_1(\theta_1), a_2(\theta_2), \dots, a_p(\theta_p)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_1}d\sin\theta_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_2}d\sin\theta_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_p}d\sin\theta_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_1}(M-1)d\sin\theta_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_2}(M-1)d\sin\theta_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_p}(M-1)d\sin\theta_p} \end{bmatrix} \quad (3)$$

阵列信号为:

$$x(k) = A_1 s(k) \quad (4)$$

式中  $s(k)$  为信号源。

### 2.2 DOA估计

#### 2.2.1 基于窄带的DOA估计

当信号为不相关信号时,基于窄带的DOA估计方法,不管是波束形成还是MUSIC方法,都需要分别用每个信号的频率建立方向向量进行搜索。

设有三个正弦信号源,频率分别为:  $f_1 = 32 \text{ MHz}$ ,  $f_2 = 10 \text{ MHz}$ ,  $f_3 = 20 \text{ MHz}$ ;波达方向分别为:  $\theta_1 = 20^\circ$ ,  $\theta_2 = 40^\circ$ ,  $\theta_3 = 60^\circ$ ;采样频率  $f_s = 100 \text{ MHz}$ ;快拍次数为1024;均匀线阵阵元数目  $M = 7$ ,间距  $d = 0.1$ 。

当用  $f_1$  和  $f_3$  进行搜索时,均会出现虚假峰值点。以  $f_3$  建立方向向量,采用Capon波束形成的方法进行DOA估计,结果如图1所示。

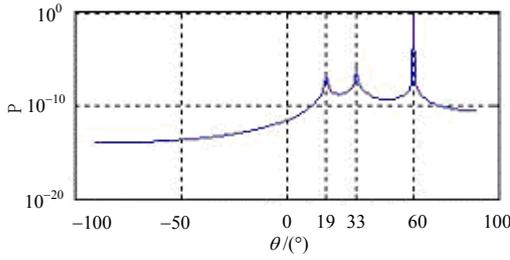


图1 采用频率  $f_3$  进行DOA估计的结果

从图1中可以看出有两个虚假峰值点, 分别为  $19^\circ$  和  $33^\circ$ 。

经过分析发现, 当使用频率  $f_i$  进行DOA搜索时, 虚假峰值点  $\theta$  满足:

$$f_i \sin \theta = f_j \sin \theta_j \quad (5)$$

当  $i \neq j$  时, 出现的峰值点即为虚假峰值点; 当  $i = j$  时, 出现的峰值点为信号  $s_i$  的DOA。这是由于方向向量中同时有两个变量  $f$  和  $\theta$ , 当使用频率  $f_i$  进行DOA搜索时, 若某个角度满足式(5), 构成的方向向量与  $\alpha_j(\theta_j)$  相同, 就出现了虚假的峰值点。

以频率  $f_3$  建立方向向量  $\alpha_3(\theta_3)$  进行DOA搜索时, 根据式(5), 虚假峰值点为:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{f_j \sin \theta_j}{f_3}\right) \quad (6)$$

式中  $j=1, 2$ 。

当  $j=1$  时,  $\theta=33.1773^\circ$ ; 当  $j=2$  时,  $\theta=18.7472^\circ$ 。这与计算机仿真的结果正好吻合。

由于仿真采用的角度步长为  $1^\circ$ , 所以虚假峰值点的测量并不精确。如果进一步缩短搜索步长, 可以发现虚假峰值点的幅度与真实峰值点的幅度并无明显区别, 说明直接采用窄带信号的DOA估计方法对几个频率不同的不相关信号进行DOA估计是不可行的。

### 2.2.2 基于宽带的DOA估计

由于几个不相关的信号具有不同的频率, 因此, 无论是波束形成的方法还是MUSIC方法都不能通过一次搜索完成几个信号的DOA估计。事实上, 几个频率不同的信号可以看作是宽带信号, 所以对其进行DOA估计也应该采用宽带信号的DOA估计方法。宽带信号的DOA估计方法一般分为两类: 一类是基于频带分解的方法, 将宽带数据分解到不同的窄带上, 然后在每个窄带进行DOA估计; 另一类是基于频率聚焦的方法, 将不同频率的方向矩阵聚焦到同一频率。本文采用多项式构造频率聚焦矩阵的方法对这类信号进行DOA估计, 这样可以避免对DOA进行预估计<sup>[10]</sup>。

信号参数设置同前, 聚焦后的频率选为  $f_0 = 20$  MHz, 聚焦后采用Capon波束形成的方法进行DOA估计, 计算机仿真的结果如图2所示。

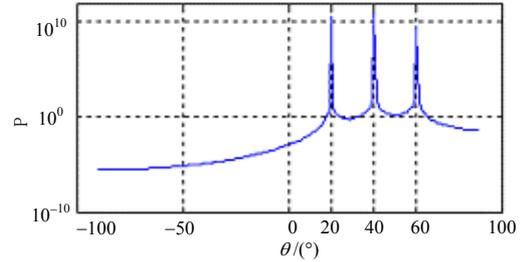


图2 基于多项式聚焦矩阵的DOA估计结果

从图2中可以看出, 经过频率聚焦后的DOA估计结果完全正确。说明几个不同频率的窄带信号事实上已经构成宽带信号, 其DOA估计也应该采用宽带信号的DOA估计方法。

## 3 相关窄带信号的DOA估计

### 3.1 相关窄带信号的阵列模型

如前所述, 窄带相关信号一定是同一个中心频率的, 只要信号不相干, 就可以采用传统的波束形成或MUSIC方法来进行估计。若信号相干, 则需要采用空间平滑等方法来进行处理, 这不是本文要讨论的内容。

以等距线阵为例, 设阵元数为  $M$ , 阵元间距为  $d$ , 有  $N$  个信号源, 其中心波长均为  $\lambda$ , 波达方向为  $\theta_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。则方向矩阵为:

$$A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_p)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d \sin \theta_1} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d \sin \theta_2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d \sin \theta_p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

阵列信号为:

$$x(k) = As(k) \quad (8)$$

式中  $s(k)$  为信号源。

### 3.2 计算机仿真

设有两个频率  $f = 10$  MHz 的正弦信号源  $s_1 = \sin(2\pi ft)$ ,  $s_2 = \sin(2\pi ft + \pi/6)$ ; 波达方向为:  $\theta_1 = 20^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ; 采样频率  $f_s = 100$  MHz; 阵元数目  $M = 7$ , 间距  $d = 1$ , 快拍次数为 1 024。采用Capon波束形成的方法进行DOA估计, 计算机仿真结果如图3所示。

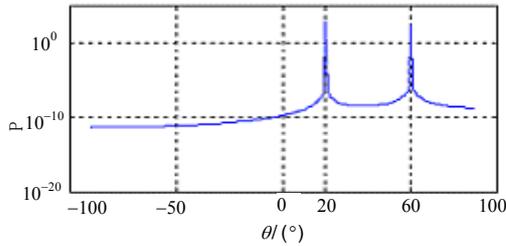


图3 相关信号的DOA估计结果

从图3中可以看出,直接采用Capon波束形成的方法来对相关信号进行DOA估计,结果是完全正确的。说明同频而初相不同的信号并不相干,这同前面的分析是一致的。

改变信号  $s_2$  的初相为0,采用Capon波束形成的方法来对信号进行DOA估计,结果如图4所示。

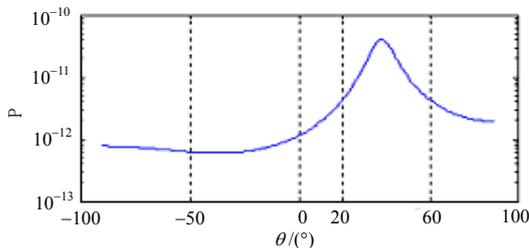


图4 相干信号的DOA估计结果

从图4中可以看出,DOA估计结果只有一个幅度极小的峰值。可见当两个信号频率和初相都相同时,信号是相干的,直接采用波束形成的方法进行DOA估计结果是错误的。

## 4 结论

鉴于一些文献在信号相关性问题的理解上不是十分准确,本文对信号的相关性及其对协方差矩阵的影响进行了详细的分析。通过理论分析指出,同频的窄带信号不一定就是相干信号,只有频率和初

相都相同的信号才是相干信号;而不相干信号也不一定是频率不同的信号,同频不同相的信号也是不相干的;对不同频率的不相关窄带信号进行DOA估计,直接采用窄带信号的DOA估计方法是不可行的,而应该采用宽带信号的DOA估计方法。经过计算仿真,进一步验证了本文的相关结论。

## 参考文献

- [1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1986, AP-34: 276-280.
- [2] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-A subspace rotation approach to estimation of parameter of cissoid in noise[J]. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1986, 34: 1340-1342.
- [3] MA C H, BOON P N. DOA estimation of ultra wide band impulse radio signal[C]//International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing. Wuhan: IEEE Press, 2005: 23-26.
- [4] GROSICK D E, MERAIM K A, HUA Y. A weighted linear prediction method for near-field source localization[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2005, 53(10): 3651-3660.
- [5] VOROBYOV S A, GERSHMAN A B, LUO Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2006, 51(2): 313-324.
- [6] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [7] 刘德树, 罗景青, 张剑云, 等. 空间谱估计及其应用[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1997: 55-63.
- [8] 荆魏, 邱善勤, 龚耀寰. 适用于大阵列天线应用的多相关信号方向估计[J]. 电子科技大学学报, 2004, 33(1): 23-26.
- [9] 徐明远, 邵玉斌. MATLAB仿真在通信与电子工程中的应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005: 338-339.
- [10] SHAW A K, KUMARESAN R. Estimation of angle of arrivals of broadband signals[C]//ICASSP-87. Dallas: IEEE Press, 1987: 2296-2299.

编辑 张俊