

RC串联电路的随机共振

蒋世奇^{1,2}, 郭 锋¹, 周玉荣³, 古天祥¹

(1. 电子科技大学自动化工程学院 成都 610054; 2. 中国燃气涡轮研究院 成都 610500; 3. 电子科技大学生命科学与技术学院 成都 610054)

【摘要】研究了时间常数受非对称双值色噪声扰动的RC串联电路的随机共振现象。利用随机平均法和Shapiro-Loginov公式,得到了平均输出幅度增益的精确表达式。分析表明,平均输出幅度增益是噪声的强度、自相关率和非对称性参数的非单调函数,适当的噪声参数和系统参数可以使平均输出幅度增益取得最小值,输出幅度增益关于噪声非对称性和相关速率的函数的最小值不随信号频率的变化而变化。

关键词 非对称双值噪声; 平均输出幅度增益; RC串联电路; 随机共振
中图分类号 O211.64 文献标识码 A

Stochastic Resonance in an RC Series Circuit

JIANG Shi-qi^{1,2}, GUO Feng¹, ZHOU Yu-rong³, GU Tian-xiang¹

(1. School of Automation Engineering, University Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;

2. China Gas Turbine Establishment Chengdu 610500;

3. School of Life Science and Technology, University Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract The phenomenon of stochastic resonance in an RC series circuit, whose time constant is fluctuated by asymmetric dichotomous noise, is investigated. Based on the random average method and Shapiro-Loginov formula, An explicit expression of the Output Amplitude Gain (OAG) is obtained. The results show that the OAG is a non-monotonic function of strength, correlation rate, and asymmetry of the noise. The minimum of OAG can be obtained by choosing appropriate values of the parameters of both noise and system. The minimum of the function of OAG as asymmetry or correlation rate of noise are not varied with signal frequency.

Key words asymmetric dichotomous noise; output amplitude gain; RC series circuit; stochastic resonance

随机共振的概念是在20世纪80年代初提出的,用于解释第四纪全球气象冰川问题^[1-2]。此后,随机共振的理论和实验研究引起了人们的极大兴趣。早期,对随机共振的研究主要集中于有周期信号和噪声的非线性系统中^[1-5]。近年的研究表明随机共振现象可以出现在具有乘性色噪声或分段噪声驱动的线性系统中^[6-9]。

通常,人们研究随机共振现象是研究信噪比对噪声参数的非单调依赖关系,但是幅度增益往往是电路研究中非常关心的特征量之一。文献[9]研究波动阻尼参数振子的随机共振时,使用了幅度增益作为表征量。文献[10]研究了单模激光系统中信噪比对净增益的随机共振。通常描述随机共振的非单调函数关系都有最大值出现,但也有少数研究者获得的非单调函数关系有最小值出现。如,在研究受乘性和加性噪声作用的线性系统的随机共振时,发现信

噪比是乘性噪声相关时间的非单调函数,这个函数关系就有最小值出现^[7]。本文对RC串联电路的随机共振现象进行了研究。

1 系统模型

考虑图1所示的RC串联电路,其输入、输出电压满足方程:

$$\frac{dU_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_o(t) + \frac{1}{RC}U_i(t) \quad (1)$$

式中 $U_i(t) = A \cos(\omega t)$ 是周期激励信号。考虑时间常数 $\frac{1}{RC}$ 受到扰动,即 $\frac{1}{RC} = a + \zeta(t)$ 时,方程(1)为:

$$\frac{dU_o(t)}{dt} = -[a + \zeta(t)]U_o(t) + [a + \zeta(t)]A \cos(\omega t) \quad (2)$$

式中 a 是未受扰动时的时间常数; $\zeta(t)$ 是非对称双值噪声(即随机电报信号)。其统计特性如下:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \sigma \exp[-\lambda|t-t'|] \quad (3)$$

式中 σ 和 λ 分别表示 $\zeta(t)$ 的噪声强度和自相关率, $\lambda = \tau^{-1}$, τ 是相关时间。

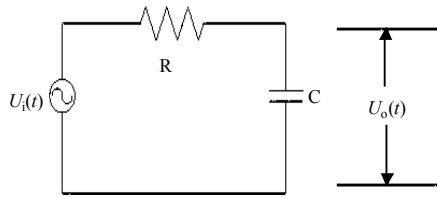


图1 RC串联电路

2 输出信号幅度增益

对式(2)取平均, 得:

$$\frac{d}{dt} \langle U_o(t) \rangle = -a \langle U_o(t) \rangle - \langle \zeta(t) U_o(t) \rangle + a A \cos(\omega t) \quad (4)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式^[11], 对双值色噪声 $\zeta(t)$ 有:

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta(t) U_o(t) \rangle = \left\langle \zeta(t) \frac{dU_o(t)}{dt} \right\rangle - \lambda \langle \zeta(t) U_o(t) \rangle \quad (5)$$

将式(2)乘以 $\zeta(t)$, 利用非对称双值噪声的性质^[12-13]: $\zeta^2(t) = \sigma + \Delta \zeta(t)$ (Δ 表示双值噪声的非对称性), 取平均, 再代入式(5), 得:

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta(t) U_o(t) \rangle = -\sigma \langle U_o(t) \rangle - (a + \lambda + \Delta) \langle \zeta(t) U_o(t) \rangle + \sigma A \cos(\omega t) \quad (6)$$

联立式(4)和式(6)为一个方程组, 解此方程组, 得 $\langle U_o(t) \rangle$ 的稳态响应:

$$\langle U_o(t) \rangle = f_1 \cos(\omega t) + f_2 \sin(\omega t) \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} f_1 = A[a(a + \lambda + \Delta)(b_1 b_2 - \sigma) + a^2 \omega^2 + \sigma \omega^2 + \sigma^2] \times \\ \quad [(\omega^2 + b_1^2)(\omega^2 + b_2^2)]^{-1} \\ f_2 = A\omega[b_1 b_2(a + \lambda + \Delta) + a\omega^2] \times \\ \quad [(\omega^2 + b_1^2)(\omega^2 + b_2^2)]^{-1} \\ b_{1,2} = a + (\lambda + \Delta)/2 \pm \sqrt{(\lambda + \Delta)^2/4 + \sigma} \end{cases} \quad (8)$$

设式(2)平均输出的稳态响应的形式解为:

$$\langle U_o(t) \rangle = m \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

可得系统的平均输出幅度增益的表达式为:

$$G = \frac{|m|}{|A|} = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{|A|} \quad (10)$$

式中 $\tan \varphi = -f_2/f_1$ 。

3 讨论

由式(10), 可得系统输出幅度增益 G 与噪声参数的函数关系。图2~图6分别绘出了信号频率和噪声

参数取不同值时, 输出幅度增益 G 与噪声的强度 σ 、自相关率 λ 以及非对称性 Δ 的关系曲线。图中电阻单位为欧姆; 电容单位为法拉; 电压单位为伏特; 其余物理量的单位为导出单位。

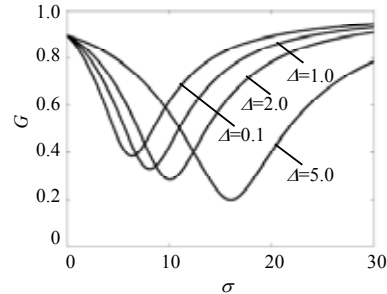


图2 不同的噪声非对称性时, 输出幅度增益与噪声强度的关系曲线($a=2.0, \omega=1.0, \lambda=1.0$)

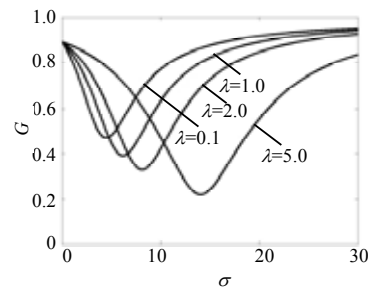


图3 不同的噪声相关速率时, 输出幅度增益与噪声强度的关系曲线($a=2.0, \omega=1.0, \Delta=0.0$)

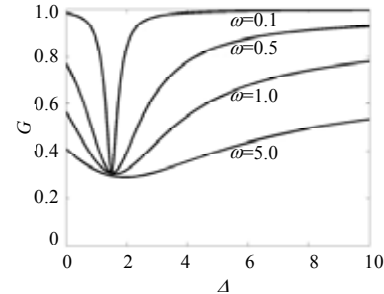


图4 不同的信号频率时, 输出幅度增益与噪声非对称性的关系曲线($a=2.0, \lambda=1.0, \sigma=9.0$)

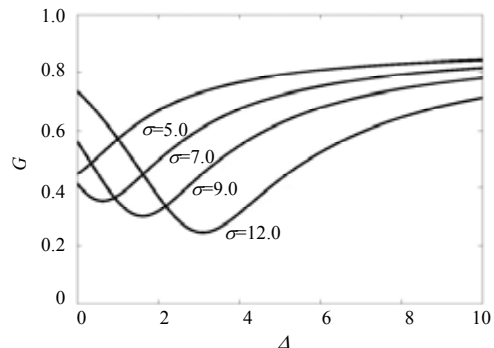


图5 不同的噪声强度时, 输出幅度增益与噪声非对称性的关系曲线($a=2.0, \omega=1.0, \lambda=1.0$)

由图2和图3可以看出, 输出幅度增益随噪声强

度 σ 的增大出现了一个最小值,即存在着传统的随机共振。随着噪声强度的增大,输出幅度增益从一个非零的值开始单调减小,在某一个噪声强度处,幅度增益达到最小值,然后随着噪声强度的增大而单调增大。从图2还可以看出,随着噪声非对称性 Δ 的增加, $G-\Delta$ 曲线的最小值向噪声强度增大的方向移动。在最小值的左边,随着噪声非对称性 Δ 的增加,输出幅度增益 G 增大;在最小值的右边,随着噪声非对称性 Δ 的增加,输出幅度增益 G 减小,即输出幅度增益 G 随噪声非对称性 Δ 的变化也是非单调的。由图3可见,随着噪声自相关率 λ 的增加, $G-\Delta$ 曲线的最小值向噪声强度增大的方向移动。在最小值的左边,随着噪声自相关率 λ 的增加,输出幅度增益 G 增大;在最小值的右边,随着噪声自相关率 λ 的增加,输出幅度增益 G 减小,即输出幅度增益 G 随自相关率 λ 的变化也是非单调的。

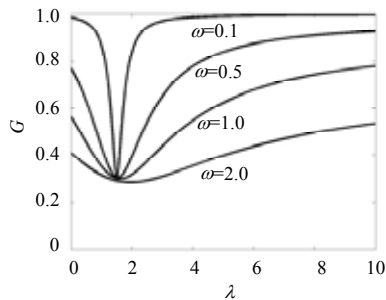


图6 不同的信号频率时,输出幅度增益与噪声自相关率的关系曲线($a=2.0$, $\sigma=9.0$, $\Delta=0.0$)

由图4和图5可见,随着噪声非对称性 Δ 的增加,输出幅度增益 G 有最小值出现,即存在着广义的随机共振。由图4可见,随着信号频率 ω 的减小,曲线变得陡峭,但 G 的最小值基本不变。由图5可知,随着噪声强度 σ 的减小, $G-\Delta$ 曲线的最小值向 Δ 减小的方向移动。在最小值的左边,随着噪声强度的增加,输出幅度增益 G 增大;在最小值的右边,随着噪声强度的增加,输出幅度增益 G 减小,即输出幅度增益 G 是噪声强度的非单调函数,这与图2和图3的结论是一致的。另外,由图6可见,输出幅度增益 G 还是噪声自相关率 λ 的非单调函数。

4 结 论

本文研究了RC串联电路的随机共振现象。研究

表明,在周期信号激励下,当电路时间常数存在扰动时,输出幅度增益存在随机共振现象。与大多数随机共振现象的研究不同的是,本文研究的对象是输出幅度增益,结果出现了最小值。即通过调整噪声参数,可能得到最小的输出幅度增益。那么,为了提高输出幅度增益,就应避免让系统工作在输出幅度增益最小的噪声条件下。这个结论,对噪声环境中信号调理电路的设计、调试,微弱信号检测的方法等将是有益的。

参 考 文 献

- [1] BENZI R, SUTERA A, VULPIANI A. The mechanism of stochastic resonance[J]. J Phys. A, 1981, 14: L 453-L 457.
- [2] BENZI R, PARISI G, SUTERA A, et al. Stochastic resonance in climatic change[J]. Tellus, 1982, 34: 10-16.
- [3] MCNAMARA B, WIESENFELD K. Theory of stochastic resonance[J]. Phys. Rev. A, 1989, 39: 4854-4869.
- [4] GAMMAITONI L, HÄNGGI P, JUNG P, et al. Stochastic resonance[J]. Rev. Mod. Phys., 1998, 70: 223-287.
- [5] LUCHINSKY D G, MANNELLA R, MCCLINTOCK P V E, et al. Stochastic resonance in electrical circuits—I: conventional stochastic resonance[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 1999, 46: 1205-1214.
- [6] FULIŃSKI A. Relaxation noise induced transitions and stochastic resonance driven by nonMarkovian dichotomic noise[J]. Phys. Rev. E, 1995, 52: 4523-4526.
- [7] BERDICHEVSKY V, GITTERMAN M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise[J]. Phys. Rev. E, 1999, 60: 1494-1499.
- [8] JIANG S, GUO F, ZHOU Y, et al. Parameter-induced stochastic resonance in an over-damped linear system[J]. Physica A, 2007, 375: 483-491.
- [9] GITTERMAN M. Harmonic oscillator with fluctuating damping parameter[J]. Phys. Rev. E, 2004, 69: 041101/1-041101/4.
- [10] 程庆华, 曹力, 吴大进, 等. 单模激光系统中信噪比对净增益的随机共振[J]. 光子学报, 2004, 33(8): 901-904.
- [11] SHAPIRO V E, LOGINOV V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations[J]. Physica A, 1978, 91A: 563-574.
- [12] FULIŃSKI A. Non-Markovian noise[J]. Phys. Rev. E, 1994, 50: 2668-2681.
- [13] FULIŃSKI A. Non-Markovian dichotomic noises[J]. Acta Phys. Pol. B, 1995, 28: 1131-1157.

编辑 漆蓉