信号测不准原理的量子诠释

王 鹏[1,2]，李建平[1]

（1. 电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 610054；2. 成都信息工程学院软件工程系 成都 610225）

【摘要】根据量子力学的测不准原理，采用力学量算符的方法得到了信号在时频分析时的测不准原理，并对该原理进行量子诠释，认为信号在某种意义下可以看作是一个存在波粒二重性的类量子系统，正是由于信号的波粒二重性导致无法同时准确地测定信号的时间和频率。在证明信号测不准原理的同时得到了信号的频率算符，该算符具有广阔的理论应用前景。信号的量子诠释在揭示信号量子本质的同时，为量子力学中的理论框架应用于信号处理提供了理论支持。

关 键 词 信号频率算符；类量子系统；测不准原理；波粒二重性

中图分类号 TN911.6 文献标识码 A

Quantum Interpretation of Signal's Uncertainty Principle

WANG Peng[1,2]，LI Jian-ping[1]

(1. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;

2. Department of Software Engineering, Chengdu University of Information Technology Chengdu 610225)

Abstract The uncertainty principle of signal is proved according to the uncertainty principle of quantum mechanics, and is further interpreted by quantum mechanics. The signal can be considered as a kind of the quasi quantum system with wave-particle dualism. Because of the wave-particle dualism of the signal, time and frequency can not be measured at the same time. The frequency operator (FO) of signal is defined in this study, and it can be widely used in signal theory and, especially in wavelet research. The quantum interpretation for the signal explains the essence of the signal and provides the theory support for applying the framework of quantum mechanics to the signal processing.

Key words frequency operator of signal; quasi quantum system; uncertainty principle; wave-particle dualism

测不准原理最早是对一些理想实验的分析以及de Broglie关系而得出的，后来又被波函数的统计诠释严格证明，使其涵义和表述更为确切[1]。测不准原理是人类的一个十分重要的发现，是量子力学中的基本定理之一。许多重要的物理现象(如粒子的隧道效应等)均是由粒子的测不准原理引起的。信号作为物质世界某种物理现象的反应，同样遵守测不准原理，特别是在对信号进行时频分析时，测不准原理具有举足轻重的作用。文献[2-3]采用傅里叶分析的方法对信号的测不准原理进行证明，信号的测不准原理表明信号具有类似波粒二重性的特征。

对信号测不准原理进行量子诠释可以进一步了解信号的本质，解释信号的某些特性。文献[4-5]提出了量子信号处理的概念，量子信号处理越来越被重视[6-8]。但是，对信号量子本质的研究还十分不足。本文以信号测不准原理为突破口，采用量子力学中算符的概念，证明信号的测不准原理，研究信号的量子特性，提出信号是具有波粒二重性的类量子系统观点，对于今后量子信号处理的研究具有理论指导作用。

1 量子力学中的测不准原理

量子系统中测不准关系本质上是由于微观粒子的波粒二重性所导致的。为对信号中的测不准原理进行量子诠释，首先要对量子力学中的测不准原理进行一些说明。定义力学量算符 $\hat{A}$ 的平均值：

$$(\psi,\hat{A}\psi)=\int\psi^*(r)\hat{A}\psi(r)\mathrm{d}^3r=\overline{A} \tag{1}$$

式中 $\overline{A}$ 为力学量算符 $\hat{A}$ 的平均值。则满足 $(\psi,\hat{A}\psi)=(\hat{A}\psi,\varphi)$ 的算符 $\hat{A}$ 称为厄米算符。厄米算符的平均值为实数，实验上的可观测量在任何态下的

收稿日期：2007－04－22；修回日期：2007－08－16

基金项目：国家自然科学基金(60702075)；中国博士后科学基金(20070410386)；四川省教育厅重点项目(07ZA014)

作者简介：王 鹏(1975－)，男，博士后，副教授，主要从事量子算法、并行计算、小波分析、信号处理和数据挖掘方面的研究.

平均值一定为实数，因此相应的算符必为厄米算符。

为说明测不准原理，引入力学量算符的对易式 (commutator) $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$，如果 $[\hat{A},\hat{B}]=0$，则说明算符 $\hat{A}$ 与算符 $\hat{B}$ 对易。

基于以上定义可以严格证明测不准原理：

$$\sqrt{(\Delta A)^2(\Delta B)^2}\geqslant\frac{1}{2}\left|\overline{[\hat{A},\hat{B}]}\right| \tag{2}$$

由式(2)可以看出，如果两个力学量A与B不对易，则A与B不能同时测定，或者说它们没有共同的本征态。

2　信号测不准原理的量子推导

2.1　位置和动量的测不准原理

为了说明信号时间与频率的测不准关系，首先要了解量子力学中位置和动量的测不准原理是如何得到的。

粒子处于波函数 $\psi(r)$ 所描述的状态时，位置 x 的平均值为：

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(r)|^2\,x\mathrm{d}^3r \tag{3}$$

“粒子在空间某一点动量”的提法是没有意义的，所以不能像位置一样直接计算动量的平均值：

$$\bar{p}\neq\int\left|\psi(r)\right|^2p(r)\mathrm{d}^3r$$

根据量子力学原理给定波函数：

$$\psi(r)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pr/\hbar}\mathrm{d}^3p$$

之后，测得粒子动量在 $(p,p+\mathrm{d}p)$ 中的几率为 $\left|\varphi(p)\right|^2\mathrm{d}^3p$，其中：

$$\varphi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr/\hbar}\mathrm{d}^3r$$

因此可以借 $\varphi(p)$ 间接计算动量的平均值：

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3p\left|\varphi(p)\right|^2p=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3p\varphi^*(p)p\varphi(p)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3r\psi^*(r)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pr/\hbar}p\varphi(p)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3p\psi^*(r)\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}(-\mathrm{i}\hbar\nabla)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pr/\hbar}\varphi(p)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3r\psi^*(r)(-\mathrm{i}\hbar\nabla)\psi(r)$$

据此可以用 $\psi(r)$ 直接计算动量平均值。定义动量算符 $\hat{p}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$，则动量的平均值为：

$$\bar{p}=\int\psi^*(r)\hat{p}\psi(r)\mathrm{d}^3r$$

位置和动量有关系式：

$$(x\hat{p}_x-\hat{p}_xx)\psi=x(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi-(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})(x\psi)=\mathrm{i}\hbar\psi$$

所以 $[x,p_x]=\mathrm{i}\hbar$。

由测不准原理可知：

$$\nabla x\nabla p_x\geqslant\frac{1}{2}\left|\overline{[x,p_x]}\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{i}\hbar\right|=\frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

这一结果表明粒子的位置和动量不能同时被测定。

2.2　信号时间和频率的测不准原理

对于信号中时间和频率的测不准原理可以比照力学量位置和动量的推导过程。

在信号分析中，时间和频率通过傅立叶变换联系起来，时间和频率都是信号中实际可以观察的量，且它们的值一定为实数，所以时间和频率所对应的算符一定是厄米算符，信号 $f(t)$ 对时间的平均值可以通过下式计算：

$$\bar{t}=\int\left|f(t)\right|^2t\mathrm{d}t \tag{5}$$

对比量子力学的动量，“信号在某一时刻的频率”的提法也是没有意义的，所以不能采用计算时间平均值的方法直接计算信号频率平均值。仿照量子力学中动量算符，定义信号的频率算符 $\hat{\omega}$，由于信号的时间和频域互为傅里叶变换对：

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

信号的频率平均值为：

$$\bar{\omega}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left|\hat{f}(\omega)\right|^2\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\hat{f}^*(\omega)\omega\hat{f}(\omega)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}tf^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\omega\hat{f}(\omega)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}tf^*(t)(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\hat{f}(\omega)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}tf^*(t)(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t})f(t)$$

由此定义信号的频率算符为：

$$\hat{\omega}=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{6}$$

利用频率算符可以计算：

$$(t\hat{\omega}-\hat{\omega}t)f(t)=t(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t})f(t)-(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t})tf(t)=\mathrm{i}f(t)$$

所以 $[t,\hat{\omega}]=\mathrm{i}$，由量子测不准原理可得信号时间和频率的测不准原理：

$$\nabla t\nabla\omega\geqslant\frac{1}{2}\left|\overline{[t,\hat{\omega}]}\right|=\frac{\left|\mathrm{i}\right|}{2}=\frac{1}{2} \tag{7}$$

可见通过将信号看作量子系统，采用量子力学中力学量算符的方法能导出信号的测不准原理，推

导过程更能反映信号的物理本质，并且还可得到类似动量算符的信号频率算符 $\hat{\omega}$。信号的测不准原理表明信号的时间和频率不能同时被准确测定。

3　信号测不准原理的量子诠释

以上采用量子算符的方法给出了信号时频分析中的测不准原理。从物理本质上分析，信号在时频特性上存在测不准原理是由于信号与微观粒子一样存在波粒二重性。描述一个信号，可以从时域上进行分析，也可以从频域上进行分析，信号的时域反映的是信号的粒子特性，信号的频域反映的是信号的波动特性。如果把信号看作是一个类量子系统，量子力学中对力学量本征态的定义为：对系统测量力学量A所得结果是唯一确定的，则称这种状态为力学量A的本征态。根据这一定义，可以认为信号的时域表示为力学量时间(t)的本征态，信号的频域表示为力学量频率($\hat{\omega}$)的本征态。在信号的时间本征态中可以准确地测定任一时刻的信号幅度，在信号的频率本征态中可以准确地测定任一频率成份的强度。信号的傅立叶变换就是将信号从时间的本征态变换到频率本征态，由于$[t,\hat{\omega}]=\mathrm{i}$，时间和频率没有共同本征态，力学量$t$和$\omega$不能同时准确测定，所以可以认为：信号是一个具有波粒二重的类量子系统，信号中的测不准原理是信号波粒二重性的反映。

如要准确地测定信号在时域上t_0点的幅度，可以采用$\delta(t-t_0)$作为测量“探针”作用于时间本征态$f(t)$上，得到$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)$。可见δ函数可以作为精确的时间探针得到信号时域任一点的幅度。对被δ函数作用后的信号作傅里叶变换：

$$\hat{f}_{t_0}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=f(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$$

可以看出信号被δ函数作用后，在频域上，各频率成份的强度为常数，也就是说信号完全失去了频率分辨能力。这就是测不准原理的极限情况：在获得绝对精确的时间分辨率时会完全失去信号的频率分辨能力，反之也一样。为了同时获得一定的时间和频率分辨能力，采用傅里叶变换是无法办到的。根据测不准原理，通过降低时域探针的分辨力，即可提高信号在频域的分辨能力。Gabor变换和Wavelet变换采用的都是这种方法[9-10]，通过取适当分辨率的窗函数或小波函数作为信号时域“探针”，能同时获得时域和频率上的分辨能力，对应于将信号变换到它的非本征态再进行测量。图1是Morlet小波函数在不同尺度下的图像。不同尺度的小波对应于不同分辨率的“探针”，尺度越大时间分辨能力越弱，频率分辨能力越强；尺度越小时间分辨能力越强，频率分辨能力越弱。小波变换利用测不准原理实现了信号的多分辨率分析，但由于信号的波粒二重性限制，不可能同时准确地知道信号的某个频率强度和它发生的时间。

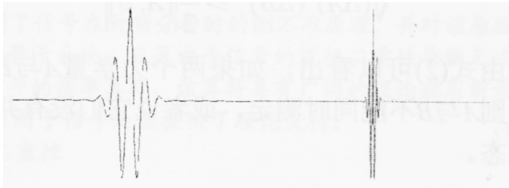

图1　不同尺度下的Morlet小波函数

本文在得到信号测不准原理时首先定义了信号的频率算符 $\hat{\omega}$，它的表达形式与量子力学中的动量算符十分相似。从前面的推导可以看到信号$f(t)$与量子力学的状态函数相对应，对信号进行测量对应于量子系统中对状态函数的测量。信号频率算符$\hat{\omega}$的存在正是信号波粒二重性的表现和证明，它与信号的时间算符不对易，导致无法同时测定信号的时间和频率。量子力学对算符的应用十分广泛，已经形成完整的数学体系，并且认为信号可以作为一个类量子系统，所以如何将信号频率算符应用于信号研究是今后需要认真研究的课题。

4　结　论

信号分析中的测不准原理的物理本质是信号的波粒二重性，并可以通过量子力学的方法对这一原理进行严格的证明。

信号中的频率在量子诠释下存在类似于动量算符的频率算符$\hat{\omega}$，可由此算符得到信号的测不准原理，表明信号在某种意义下可被看作是一个具有波粒二重性的类量子系统。基于这一认识，可以利用量子力学的数学框架对信号进行研究。信号的量子诠释为量子算法应用于信号处理提供了理论依据。

参　考　文　献

[1] 曾谨言. 量子力学导论[M]. 第2版. 北京: 北京大学出版社, 1998: 26-28.
[2] COHEN L. Time-frequence analysis theory and application[M]. New York: Prentice Hall, 1995: 44~49.
[3] ROSLER M, VOIT M. An uncertainty principle for hankel transforms[C]//Proceeding of the American Mathematical Society. Providence: [s.n.], 1999.
[4] ELDER Y C, OPPENHEIM A V. Quantum signal processing[J]. Signal Processing, 2002, 11: 12-32.

(下转第42页)

图2和图3分别给出了2-DH3和3-DH3数据分组在不同的信噪比下，吞吐量和载荷长度之间的关系。

4 结　论

本文以AWGN为信道模型，研究了蓝牙数据分组长度对吞吐量的影响。分析了蓝牙2.0+EDR新规范用到的GFSK、π/4-DQPSK、8DPSK三种调制方式在AWGN信道下，位错误率与不同信噪比之间的关系，进而推出蓝牙各个数据分组在不同信噪比下的数据传输速率。本文对建立的数学模型进行了仿真，从仿真结果可以发现，并非载荷越长吞吐量就越高，因为在一定的信噪比条件下，数据载荷越长，越容易受到干扰，也就越容易引起重传，从而降低系统传输吞吐量。只有针对不同的信噪比，选取合适的数据载荷长度，才能达到最高的系统传输吞吐量。

参 考 文 献

[1] SIG. Specification of the Bluetooth system. Core Version 1.2[S]. [2007-06-06]. http://www.bluetooth.com.

[2] SIG. Specification of the Bluetooth system. Core Version 2.0+EDR[S]. [2007-05-18]. http://www.bluetooth.com.

[3] MATTHEW C. On the throughput of Bluetooth data transmissions[C]//IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Orlando, Florida: IEEE, 2002: 119-123.

[4] SOUISSI S, MEIHOFER E F. Performance evaluation of a Bluetooth network in the presence of adjacent and cochannel interference[J]. In Proc. IEEE Emerging Technologies Symposium, 2000(10): 1-6.

[5] LEE E J, YOUN H Y. Efficient scheduling by incorporating bin packing with limited and weighted round robin for Bluetooth[C]// Computational Science and Its Applications - ICCSA. [S.l.]: [s.n.], 2006, (3983): 187-196.

[6] POPOVSKI P, YOMO H. Energy-efficient operation through interference avoidance for interconnected bluetooth WPANs[J]. Wireless Personal Communications, 2005, (34): 163-187,

[7] GIANNI P, ROBERTO V. Analytical evaluation of throughput for a Bluetooth piconet with MAC level link adaptation[J]. Mobile Networks and Applications, 2005, 10(2): 717-725.

[8] RODGER E, ZIEMER, ROGER L, et al. Introduction to digital communication[M]. [S.l.]: Person Education, 2000: 174-187.

[9] MILLER C, LEE J. BER expressions for differentially detected π/4-DQPSK modulation[J]. IEEE Transactions on Communications, 1998, 46(1): 71-81.

[10] KLEINSCHMIDT J H, PELLENZ M E, JAMHOUR E. Bluetooth network performance in Nakagami-m fading channels[C]//IFIP TC6 International Conference on Mobile and Wireless Communications Networks. Singapore: IEEE 2004: 639-644.

编　辑　张　俊

(上接第16页)

[5] ELDER Y C, Quantum signal processing[D]. Mass: Inst Technol, 2001.

[6] TSENG Chien-cheng, HWANG Tsung-ming. Quantum digital image processing algorithms[C]//16th IPPR Confference on Computer Vision, Graphics and Image Processing. [S.l.]: [s.n.], 2003: 827-834.

[7] WANG Peng, LI Jian-ping. Quantum interpretation of frequency operator[C]//In ICNC’07: Third Internation Conference on Natural Computation. Haikou and Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2007: 613-618.

[8] WANG Peng, LI Jian-pin. Wavelet denoising by quantum threshold algorithm[C]//In ICIG’07: Proceeding of the Fourth International Conference on Image and Graphics. Chengdu & Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2007: 62-66.

[9] BOGGESS A, NARCOWICH F J. A first course in wavelet with fourier analysis[M]. London: Pearson Education, 2001: 115-180.

[10] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安: 西安交通大出版社, 1998: 20-33.

编　辑　熊思亮