第 37 卷 第 1 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.37 No.1
2008 年 1 月 Journal of University of Electronic Science and Technology of China Jan. 2008

# 不完全金融市场中基于最优对冲的衍生资产定价

曹晓华[1]，潘 杰[2]

(1. 上海交通大学管理学院 上海 闵行区 200052; 2. 江西财经职业学院计算机系 江西 九江 332000)

【摘要】研究了一个不完全的二期金融市场中的衍生资产定价问题，给出衍生资产在二阶矩最小意义下的最优对冲资产组合，证明了该组合的期望收益等于衍生资产的期望收益，并利用其确定了衍生资产的理论价格。当问题退化为普通二叉树模型时，用一般两期模型得到的最优对冲资产组合就是完全复制资产组合，结论与二叉树模型的结论一致。最后给出了计算期权价格的例子。

**关 键 词** 二叉树模型; 衍生资产定价; 预期收益; 不完全市场

**中图分类号** F831 **文献标识码** A

# Derivative Pricing Based on Optimal Hedge in Incomplete Markets

CAO Xiao-hua[1]，PAN Jie[2]

(1. School of Management, Shanghai Jiaotong University Minxing Shanghai 200052;

2. Computer Department, Jiangxi Vocational College of Finance and Economics Jiujiang Jiangxi 332000)

**Abstract** In this paper we study the derivative pricing in incomplete financial market with two periods. The optimal hedge portfolio is given under the two moment sense. We show that the expected revenue of this portfolio is equal to the expected revenue of the derivatives and determines the theoretical price. An example on option pricing is given to demenstrate our discussions.

**Key words** CRR model; derivative pricing; expected revenue; incomplete market

自文献[1]提出欧式期权以及一般金融衍生证券的B-S(Black-Scholes)公式以来，衍生产品的定价理论获得了大量的研究成果。现代金融定价理论是建立在随机分析(特别是鞅论)基础上的。当且仅当存在唯一的等价鞅测度(EMM)[2-3]时，金融市场是无套利的均衡市场。如果金融市场中的每一个衍生证券都存在唯一复制资产组合(或更一般地称为自融资地资产组合策略)，则称该金融市场是完全的。关于完全市场的研究已经比较成熟，其核心结果即Black-Scholes公式，完全金融市场的主要结论可参见文献[3-4]。

有许多关于不完全金融市场中衍生资产定价问题的研究。文献[5]研究了非线性(不完全)金融市场中的对冲与资产组合的最优化问题。文献[6]从投资者期望效用最大化的角度研究了不完全市场中的期权定价。文献[7]利用半鞅理论研究了不完全市场中的期权对冲模型，从而把半鞅理论引入到不完全市场中。文献[8-9]利用半鞅理论进一步研究了不完全市场。

本文研究在二期多叉树模型中衍生证券的最优对冲问题，并给出计算期权价格的具体算例。

## 1 二期多叉树模型中的最优对冲

两期二叉树(cox-ross-rubinstein，CRR)模型可以看作是Black-Scholes模型的离散情形。在二叉树模型中，当市场无套利时，市场是完全的。下面考虑二期的多叉树模型。

假设模型中有现在时期“0”和未来时期“1”两个时期；金融市场中有 $d+1$ 种金融资产，其中包括一种无风险债券 $B$ 和 $d$ 种股票。在时刻 $t(t=0,1)$，债券的价格记为 $B_t$。债券的价格是确定的，即 $B_0=1$，$B_1=1+r$，常数 $r$ 表示单期的无风险利率。

股票的价格是一个随机变量，设期末价格可能有 $n$ 种状态：

$$\boldsymbol{\Omega}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

在不同的状态，股价可能不同。股票 $j$ 在状态 $\omega_i$ 下的价格可描述为 $s_j$，$j=1,2,\cdots,d$；$p_i$ 表示状态 $\omega_i$

收稿日期：2006－10－28；修回日期：2007－06－30
基金项目：国家自然科学基金资助(70073017)
作者简介：曹晓华(1971－)，男，博士，主要从事金融证券方面的研究.

出现的概率：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad p_i > 0$$

用 $E[\tilde{S}_j]$ 表示股票$j$的期望价格；$\sigma_j$ 表示股票$j$的期末价格的标准差，$\forall j = 1,2,\cdots,d$；$\boldsymbol{L} = (E(\tilde{S}_0), E(\tilde{S}_1), \cdots, E(\tilde{S}_d))^{\mathrm{T}}$ 表示 $d+1$ 种资产的期望收益向量；$\sigma_{ij}$ 表示证券$i$和证券$j$的协方差($i$=0时表示债券)；$\boldsymbol{V}$ 表示 $d+1$ 种资产的协方差矩阵。市场的完全性视 $d$ 和 $n$ 的大小关系而定。关于状态数目与资产个数决定市场完全性的研究，文献[10]通过分裂数 $K(t,A)$ 有详细的讨论。

对于可能不完全的二期 $n$ 叉树模型，本文考察衍生证券的最优对冲。设 $X$ 是以 $d$ 种股票为根本资产的衍生证券，即证券 $X$ 在期末的收益是股票价格 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d$ 的函数：

$$S_X = \Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$$

式中　$S_X$ 为衍生证券 $X$ 在期末的收益；$\Phi$ 是 $R^d \to R$ 的非负函数。如果市场是完全的，一定存在满足 $\sum_{j=0}^{d} y_j \tilde{S}_j = \Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$ 的资产组合 $\boldsymbol{h}$。衍生证券 $t=0$ 时的理论价格为：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{d} y_k s_k^0$$

当市场不完全时，资产组合 $\boldsymbol{h}$ 可能不存在。但希望找到与 $X$ 的期末收益 $\Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$ 的差距 $\sum_{j=0}^{d} y_j \tilde{S}_j - \Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$ 在二阶矩意义下最小的资产组合作为近似复制。

**定义 1**　使得 $\sum_{j=0}^{d} y_j \tilde{S}_j - \Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$ 的二阶矩 $\left[E\sum_{j=0}^{d} y_j \tilde{S}_j - \Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)\right]^2$ 最小的资产组合 $\boldsymbol{h} = (y_0, y_1, \cdots, y_d)^{\mathrm{T}}$，称为衍生证券 $X$ 的最优对冲资产组合。

如果 $\boldsymbol{h} = (y_0, y_1, \cdots, y_d)^{\mathrm{T}}$ 是衍生证券 $X$ 的最优对冲资产组合，那么 $\boldsymbol{h}$ 的当前价值 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{d} y_k s_k^0$ 可以看作衍生证券当前的理论近似价格。市场的不完全性越弱，即不相关的根本资产数目越多，近似的效果越好。下面求解衍生证券的最优对冲资产组合：

$$\min_{\boldsymbol{h}} \Delta = E\left[\sum_{k=0}^{d} y_k \tilde{S}_k - \Phi(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_d)\right]^2 \tag{1}$$

对 $y_i$ 求一阶偏导：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_i} = 2E\left[\left(\sum_{k=0}^{d} y_k \tilde{S}_k - \Phi(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_d)\right)\tilde{S}_i\right] = 0 \tag{2}$$

式中　$i = 0,1,\cdots,d$，化简式(2)得：

$$\sum_{k=0}^{d} y_k E[\tilde{S}_k \tilde{S}_i] = E[\tilde{S}_i \Phi(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_d)] \tag{3}$$

记：

$$a_{ki} = E[\tilde{S}_k \tilde{S}_i], \quad b_i = E[\tilde{S}_i \Phi(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_d)] \tag{4}$$

设定：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0d} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d0} & a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_d)^{\mathrm{T}}$$

由 $a_{ki}$ 的定义知$\boldsymbol{A}$是对称矩阵。那么式(3)可化为：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{B} \tag{5}$$

由 $a_{ki}$ 的定义 $a_{ki} = E[\tilde{S}_k \tilde{S}_i] = \mathrm{cov}(\tilde{S}_k, \tilde{S}_i) + E[\tilde{S}_k]E[\tilde{S}_i]$ 有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$。由于$\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 是半正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 可逆，从而 $X$ 的最优对冲资产组合为：

$$\boldsymbol{h}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{6}$$

衍生资产的近似理论价格为：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}^*) = \sum_{k=0}^{d} y_k^* s_k^0 \tag{7}$$

**定理 1**　在上述二期 $n$ 叉树模型中，期末收益为 $\Phi(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \cdots, \tilde{S}_d)$ 的衍生证券的最优对冲资产组合为 $\boldsymbol{h}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_d)^{\mathrm{T}}$。该衍生证券的近似价格为 $S_X = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}^*) = \sum_{k=0}^{d} y_k^* s_k^0$。

## 2　低阶的情况

如果考虑的模型中只有一种股票，即 $d=1$ 时，上面的结果可以写为更加直接的形式。此时 $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{L} = (1+r, \bar{S})^{\mathrm{T}}$，其中 $\bar{S}$ 和 $\sigma^2$ 分别表示股票价格的期望和方差。所以：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (1+r)^2 & (1+r)\bar{S} \\ (1+r)\bar{S} & \sigma^2 + \bar{S}^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2 + \bar{S}^2}{(1+r)^2\sigma^2} & -\dfrac{\bar{S}}{(1+r)\sigma^2} \\ -\dfrac{\bar{S}}{(1+r)\sigma^2} & \dfrac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

下面分两种情形来讨论：

(1) 当 $n=2$ 时，未来状态只有两种状态，就是二期二叉树模型。关于这种模型的衍生证券的定价，已经有确定的结论。

**定理 2** 在经典两期二叉树模型中，债券的现价为1；期末价为$1+r$。如果股票现价是$s$，未来的价格为$s\tilde{Z}$，其中$\tilde{Z}$取$u$的概率是$p_u$；取$d$的概率是$p_d$，且$p_u>0$，$p_d>0$，$p_u+p_d=1$，$d\leqslant 1+r\leqslant u$，那么期末收益为$\Phi(\tilde{Z})$的衍生证券$X$的复制资产组合为$(x,y)$：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+r}\dfrac{u\Phi(d)-d\Phi(u)}{u-d} \\ y=\dfrac{1}{s}\dfrac{\Phi(u)-\Phi(d)}{u-d} \end{cases} \tag{9}$$

这一结论可参见文献[3-4]。

下面用本文的一般二期模型的定理来得出上面的结论。对定理2中的衍生证券$X$，由式(4)有：

$$b_1=E[(1+r)\Phi(\tilde{Z})]=(1+r)E[\Phi(\tilde{Z})]$$

$$b_2=E[\tilde{S}\Phi(\tilde{Z})]=sE[\tilde{Z}\Phi(\tilde{Z})]$$

即：

$$\boldsymbol{B}=((1+r)E[\Phi(\tilde{Z})],sE[\tilde{Z}\Phi(\tilde{Z})])^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

由式(6)、(8)和(10)得到此时的最优对冲资产组合：

$$\boldsymbol{h}^*=(x^*,y^*)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sigma^2+\bar{S}^2}{(1+r)\sigma^2}E[\Phi(\tilde{Z})]-\dfrac{s\bar{S}}{(1+r)\sigma^2}E(\tilde{Z}\Phi(\tilde{Z})) \\ \dfrac{sE[\tilde{Z}\Phi(\tilde{Z})]-\bar{S}E[\Phi(\tilde{Z})]}{\sigma^2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

进一步计算得到：

$$\boldsymbol{h}^*=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+r}\dfrac{u\Phi(d)-d\Phi(u)}{u-d} \\ \dfrac{1}{s}\dfrac{\Phi(u)-\Phi(d)}{u-d} \end{bmatrix} \tag{12}$$

将式(12)和(9)进行比较可以看出，得到的最优对冲资产组合就是完全复制资产组合。因此当市场模型退化为一般二叉树模型时，本文模型的结论与已有结论完全一致。

(2) 当$n>2$时，此时市场是不完全的，衍生资产的最优资产组合$\boldsymbol{h}^*$可能不是完全复制的。

## 3 计算期权价格的实例

下面给出一个当$n=3$时欧式看涨期权的定价的例子。为计算方便，设无风险利率为0，即债券的价格总为1。股票现在的价格为$s$=3.5，期末的价格上升为10的概率为$p_1=0.1$，上升为5的概率为$p_2=0.4$，下降为2的概率为$p_3=0.5$。

下面计算股票的执行价格为4的欧式看涨期权的近似价格，其中：

$$\bar{S}=10\times0.1+5\times0.4+2\times0.5=4$$

$$\sigma^2=0.1(10-4)^2+0.4(5-4)^2+0.5(2-4)^2=6$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2+\bar{S}^2}{(1+r)^2\sigma^2} & -\dfrac{\bar{S}}{(1+r)\sigma^2} \\ -\dfrac{\bar{S}}{(1+r)\sigma^2} & \dfrac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{11}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

对于执行价格为4的期权，它在不同状态的收益分别为6、1、0。那么：

$$b_1=0.1\times1\times6+0.4\times1\times1=1$$

$$b_2=0.1\times10\times6+0.4\times5\times1=8$$

即$\boldsymbol{B}=(1,8)^{\mathrm{T}}$，所以这一期权的最优对冲资产组合为：

$$\boldsymbol{h}^*=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{11}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

因此，对期权的卖出者来说，卖空$\dfrac{5}{3}$的债券，持有$\dfrac{2}{3}$的股票是在二阶矩最小意义下的最优对冲组合。$\boldsymbol{h}^*$当前的价格为$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}^*)=-\dfrac{5}{3}\times1+\dfrac{2}{3}\times3.5=\dfrac{2}{3}$，所以执行价格为4的期权的当前近似理论价格为$\dfrac{2}{3}$。

## 4 结 束 语

CRR的二叉树模型是经典的离散衍生证券定价模型。本文探讨了当市场状态多于基础资产数目，导致市场非完全时的二叉树模型中衍生证券定价的问题。一般说来，在不完全的市场中，衍生证券的无套利定价不是唯一的。现在金融市场中衍生证券日益丰富，衍生资产在资本市场中起着越来越重要的作用。无论是对套期保值的公司和机构投资者，还是市场中的套利者和投机者，衍生资产的定价都是至关重要的问题。我国即将推出股指期货等衍生工具，未来的证券市场中必然有大量的衍生产品，因此加强衍生证券定价的理论研究，特别是不完全市场中衍生证券的定价理论研究有着重要的意义。

### 参 考 文 献

[1] BLACK, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. J Political Economy, 1973, 81: 637-659.

[2] COLWELL D B, ELLIOTT R J, KOPP P R. Martingale representation and hedging policies[J]. Stochastic Process, 1991, 38: 335-345.

(下转第160页)

个股票组合类似的互自相关关系。

$O_k$由股票的自协方差决定，当股票在滞后$k$期时存在过度反应，则$O_k$的值为正，与国内学者关于过度反应的研究得到的结论存在较大差异。文献[6]认为主要是由于对形成期和检验期的时间跨度选择的影响。表3反映了在不同的滞后时期$O_k$呈现正负相间，滞后1～8周的$O_k$均在5%的显著性水平下显著，暗示股票是否发生过度反应是随时间跨度选择变化的，不同的检验期跨度选择对过度反应的研究结论有很大影响。

## 3 结 论

本文通过构造沪市A股滞后1～8周的互自相关系数矩阵，发现沪市A股存在不同于美国股市的互自相关关系和领先滞后结构：在滞后1～8周，沪市A股总体相关关系表现为正负相间；滞后1～2周时小盘股组合领先大盘股组合，滞后3周时大盘组合领先小盘组合。股市投资者对信息的准确接受和分析能力有限，具有信息优势的“庄家”利用信息优势进行投机，以及广大个人投资者的“跟庄”和“跟风”使沪市A股具有明显不同于美国股市的互自相关关系和领先滞后结构。

我国沪市A股股票之间的互自相关关系在不同时间段对反转收益的作用不同且均不显著，本文的实证结果无法证实股票之间的互自相关关系是沪市A股反转收益的重要部分。本文的实证研究还暗示国内学者对过度反应的研究结果出现较大差异可能与考察区间的时间跨度选择有很大关系。

## 参 考 文 献

[1] LO A W, MACKINLAY A C. When are contrarian profits due to stock market overreaction?[J]. Review of Financial Studies, 1990, 3(2): 175-205.

[2] DE B W, THALER R. Does the stock market overreact?[J]. Journal of Finance, 1985, 40(3): 793-805.

[3] 王永宏, 赵学军. 中国股市“惯性策略”和“反转策略”的实证研究[J]. 经济研究, 2001, (6): 56-61.

[4] KANG J, LIU M H, NI S X. Contrarian and momentum strategies in the China stock market: 1993-2000[J]. Pacific-Basin Finance Journal, 2002, (10): 243-265.

[5] 刘 力, 陈兴珠. 中国股市过度反应研究[D]. 北京: 北京大学, 2001.

[6] 邹小芃. 我国证券市场回报率过度反应的实证分析[J]. 经济科学, 2003, (4): 32-40.

[7] 张人骥, 朱平方, 王怀芳. 上海证券市场过度反应的实证研究[J]. 经济研究, 1998, (5): 58-64.

[8] 张永东, 毕秋香. 日内价格行为和短期过度反应: 对中国股市的实证分析[J]. 华南金融研究, 2002, 16(6): 38-43.

[9] 骆 艳, 曾 勇. 我国股市对盈利信息反应的一个实证检验[J]. 电子科技大学学报, 2003, 32(1): 99-103.

[10] 赵金刚, 陈 武. 关于封闭式投资基金投资理念的实证分析[J]. 西南石油学院学报(社科版), 2003, (5): 25-29.

[11] 永 波. 投资者心中的三大疑虑[J/OL]. [2004-08-29]. http://www. cbt.com.cn/cbtnews/frontend/news.asp?ID=37848.

[12] BRENNAN M J, JEGADEESH N, SWAMINATHAN B. Investment analysis and the adjustment of stock prices to common information[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(4): 799-824.

编 辑 熊思亮

---

(上接第156页)

[3] ELLIOTT R J, KOPP P R. Mathematics of financial markets[M]. [S.l.]: Springer Press, 1999.

[4] WILMOTT P, DEWYNME J, HOWISON S. Option pricing: mathematical models and computation[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.

[5] CVITANIC J. Nonlinear financial markets: hedging and portfolio optimization[C]//Mathematics of Derivatives Securities. [S.l.]: Publications of the Newton Institute,1997.

[6] DAVIS M H A. Option pricing in incomplete markets[C]// Mathematics of Derivatives Securities. [S.l.]: Publications of the Newton Institute,1997.

[7] SCHWEIZER M. Option hedging for semimartingales[J]. Stochastic Process Appl, 1991, 37: 339-363.

[8] SCHWEIZER M. A projecting result for semimartingales[J]. Stochastics Rep, 1994, 50: 175-183.

[9] FRITTELLI M. Semimartingales and asset pricing under constraints[C]//Mathematics of Derivatives Securities. [S.l.]: Publications of the Newton Institute, 1997.

[10] HARRISON J M, KREPS D M. Martingales and arbitrage in multi-period securities market[J]. J Econ Theory, 1979, 20: 381-408.

编 辑 熊思亮