

采用K-L正交分解降低Chirp信号噪声的方法

刘 皓, 周楠清

(电子科技大学通信抗干扰技术国家级重点实验室 成都 610054)

【摘要】由于Chirp信号瞬时频率的估计易受噪声影响,该文利用K-L正交分解,提出了一种降低Chirp信号噪声的方法。K-L正交分解将噪声平均分配到各正交分量,而将信号主要集中在某一最大分量,从而提高信噪比。数学分析和仿真结果同时表明,该方法能降低信号噪声,改善信噪比达6 dB,使瞬时频率估计更为准确。最后,结合Chirp信号自相关函数的特性,对该方法的应用做了进一步的推广。

关键词 Chirp; 瞬时频率; K-L正交分解; 降低噪声
中图分类号 TN911.72 **文献标识码** A

A Method of Noise Reduction for Chirp Signal Based on K-L Orthogonal Division

LIU Hao and ZHOU Nan-qing

(National Key Laboratory of Communications, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract Because the estimation of instantaneous frequency (IF) can be easily affected by noise, a method of noise reduction for Chirp signal based on K-L orthogonal division is presented. The signal is concentrated to a principal component, but the noise is equally distributed to several components. Thus, the SNR is improved. Both analysis and simulation indicate that this method works well and makes the estimation of IF more accurate. And the SNR can be improved over 6 dB. Moreover, associated with the characteristic of Chirp's auto-correlation function, the simplification of this method is considered for some applications.

Key words Chirp; instantaneous frequency; K-L orthogonal division; noise reduction

Chirp信号具有很好的特性,其频率随时间线性增大或减小,在雷达系统,声纳系统及通信系统得到了越来越多的应用^[1-3]。由于其具有低功耗、抗多径、抗干扰的能力^[4],IEEE802.15.4a将Chirp系统作为UWB无线通信系统的提案之一^[5]。Chirp信号优越特性受到广泛关注。Chirp信号频率线性变化的特性,给人们进行信号检测和分析带来了诸多方便,通过对其瞬时频率的估计可以估计时延,有利于通信系统的同步^[6]。人们对Chirp信号线性频率的估计和预测是研究热点之一,文献[2]采用了多项式相位拟合的方法对Chirp信号的瞬时频率进行了估计,但是该算法受噪声影响特别大,只有在高信噪比时才有效,文献[8-9]采用时频分析的方法估计Chirp信号的瞬时频率,虽然能在较低信噪比下估计瞬时频率,但是这种方法涉及移位相关和FFT运算,计算复杂。本文通过K-L正交分解降低Chirp信号的噪声,再运用相位拟合的方法估计瞬时频率,计算量较少,估计性能大大提高。

1 K-L正交分解降低噪声的数学原理与实现方法

1.1 数学原理

在信号处理中,常常需要将随机信号的观测样本用另一种方式表示,或者由自己的某些正交分量来表示,同时使这种新的表示具有某些期望的性质。如果正交分量根据信号观测样本的协方差矩阵适当选择,就有可能在其正交分量中,获得具有最小均方误差的信号表示。在均方误差最小的意义上,这样一种信号分解是最优分解,这种信号分解是Karhunen和Loeve提出来的,称为Karhunen-Loeve变换,简称K-L正交变换^[10]。

令连续Chirp信号为:

$$s(t) = e^{j(2\pi\omega_0 t + \pi\mu t^2)} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad (1)$$

式中 T 为Chirp信号的长度; μ 为扫频速率; ω_0 为初始角频率。

对于数字Chirp信号有:

$$s(n) = e^{j \left[2\pi\alpha_0 T_s \left(n - \frac{N+1}{2} \right) + \pi\mu T_s^2 \left(n - \frac{N+1}{2} \right)^2 \right]} \quad (2)$$

式中 $s(n)$ 为信号的第 n 个采样点; T_s 为采样时间, $n=1, 2, \dots, N$, $N = \frac{T}{T_s} + 1$, N 为一段 Chirp 信号的采样点数。

在没有任何噪声的情况下, 将接收到的信号 $s(n)$ 分别延迟 $0, 1, 2, \dots, M-1$ 位, 构成 M 路信号矩阵:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s(1) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s(N-1) & s(N) \end{pmatrix} \quad (3)$$

则可得到信号的自相关矩阵:

$$\mathbf{R}_s = \frac{1}{N} \mathbf{S} \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(M-1) \\ R(-1) & R(0) & \dots & R(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(-M+1) & R(-M+2) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中

$$R(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-m} s^*(n) s(n+m)$$

$$R(-m) = \frac{1}{N} \sum_{n=m+1}^N s^*(n) s(n-m)$$

令 $n' = n - m$ 有:

$$R(-m) = \frac{1}{N} \sum_{n'=1}^{N-m} s^*(n'+m) s(n') =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n'=1}^{N-m} s^*(n'+m) s(n') = R^*(m)$$

容易看出 $\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s^H$, 故相关矩阵 \mathbf{R}_s 为一正规矩阵, 则一定存在正交矩阵 $\mathbf{U}_{M \times M} = [u_1, u_2, \dots, u_M]^T$, 使得:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{U} \mathbf{A}_{M \times M} \mathbf{U}^T \quad (5)$$

式中 $\mathbf{A}_{M \times M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix}$ 为对角元素递减的对

角矩阵; $\lambda_i (i=1, 2, \dots, M)$ 为相关矩阵 \mathbf{R}_s 的特征值; \mathbf{u}_i 为对应于 λ_i 的归一化特征向量, 即 $\mathbf{R}_s \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ 。对信号矩阵 $\mathbf{S}_{M \times N}$ 做正交分解:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \mathbf{S} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T \quad (6)$$

则称式(6)为对信号矩阵 \mathbf{S} 的 K-L 正交分解^[10], 其中

y_i 为 \mathbf{S} 的第 i 个正交分量。且 y_i 的自相关矩阵为:

$$\mathbf{Y}^* \mathbf{Y}^T = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N+M-1} |y_1(n)|^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \sum_{n=1}^{N+M-1} |y_M(n)|^2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{U}^T \mathbf{R}_s \mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{A}_{M \times M} \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{A}_{M \times M} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} \quad (7)$$

由式(7)可知, 第 i 个正交分量的能量 (y_i 的方差) 等于第 i 个特征值的 N 倍。因为正交分解不损失能量, 即 $M E_s = N \sum_{m=1}^M \lambda_m$ 。其中 $E_s = \sum_{n=1}^N |s(n)|^2$, 为原 Chirp 信号 $s(n)$ 的能量。

假设选取特征值最大时对应的正交分量进行分析, 则经过正交分解后最大正交分量的能量为:

$$E_{Y_s} = N \lambda_{\max} = \frac{\lambda_{\max}}{\sum_{m=1}^M \lambda_m} M E_s \quad (8)$$

在有噪声的情况下, 接收到的信号为: $x_n(n) = s(n) + n_0$, 构成矩阵为 $\mathbf{X}_N = \mathbf{S} + \mathbf{N}_0$, 其中 \mathbf{N}_0 是平均功率为 n_0 的高斯白噪声构成的矩阵, 信噪比为 $\text{SNR} = \frac{E_s}{N n_0}$ 。

按照式(6)对 \mathbf{X}_N 做 K-L 正交分解有:

$$\mathbf{Y}_{N_0} = \mathbf{U}^T (\mathbf{S} + \mathbf{N}_0)$$

可得各正交分量的能量为:

$$\mathbf{Y}_{N_0}^* \mathbf{Y}_{N_0}^T = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N+M-1} |y_{N_0 1}(n)|^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \sum_{n=1}^{N+M-1} |y_{N_0 M}(n)|^2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^T (\mathbf{S} + \mathbf{N}) (\mathbf{S} + \mathbf{N})^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T \mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{A}_{M \times M} + \mathbf{U}^T \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^T \mathbf{U} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} + \mathbf{N} \mathbf{U}^T \begin{pmatrix} n_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & n_0 \end{pmatrix} \mathbf{U} =$$

$$N \begin{pmatrix} \lambda_1 + n_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_M + n_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

假设也只选取特征值最大时对应的正交分量进行分析,对比式(8)可知,在有噪声情况下,经过 K-L 变换后最大正交分量的信号能量仍然为:

$$E_{Y_s} = \frac{\lambda_{\max}}{\sum_{m=1}^M \lambda_m} M E_s$$

而噪声能量 $E_n = N n_0$ 和变换前的噪声能量大小相同,则变换后的信噪比为:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_Y &= \frac{E_{Y_s}}{E_n} = \frac{\sum_{m=1}^M \lambda_m}{N n_0} = \frac{\lambda_{\max}}{N n_0} M E_s \\ &= \frac{M \lambda_{\max}}{\sum_{m=1}^M \lambda_m} \frac{E_s}{N n_0} = \frac{M \lambda_{\max}}{\sum_{m=1}^M \lambda_m} \text{SNR} \end{aligned} \quad (10)$$

1.2 实现方法

由式(6)可知, K-L 正交分解为线性变换,提取正交分量可以通过线性滤波器来实现,如图1所示。

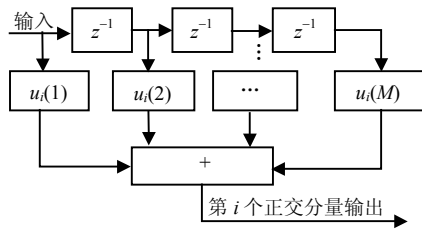


图1 正交分量提取实现框图

图1中, u_i 为第 i 个正交分量所对应的正交向量,如果选取 λ_{\max} 对应的 u_i , 则提取的正交分量为最大正交分量。

2 仿真结果与分析

仿真中Chirp信号的扫频频率为-80~80 MHz,载频为100 MHz,实际频率变化为20~180 MHz,信号延迟路数 $M = 6$, 其自相关矩阵的特征值从小到大为:

$$\lambda = (0.0006 \ 0.0008 \ 0.0022 \ 0.0553 \ 1.1418 \ 4.7992)$$

可以看出, Chirp信号的自相关性较好,自相关矩阵的特征值存在特别显著的最大值,利用K-L正交分解,能量主要集中在最大正交分量上,而高斯白噪声的能量则平均分配到各个正交分量中,如果仅提取最大正交分量分析,则有效地提高了信号噪声

比。由此可知,信噪比可以提高4.799 2倍,约有6.8 dB的增益。

在图2中,图2a~图2f为能量从小到大的正交分量,图2g为原始Chirp信号, K-L正交分解后的正交分量波形,其最大正交分量图2f和原始信号图2g的频率变化基本相同,只是信号幅度加大了。

由图3可以看出,经过K-L正交分解后再对瞬时频率进行估计,性能改善6 dB以上,和理论分析相吻合。

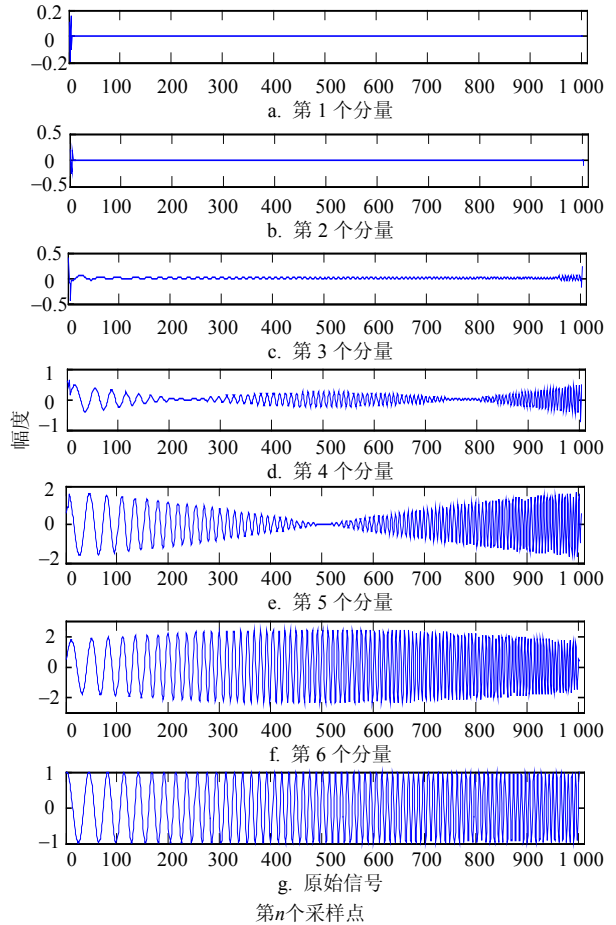


图2 Chirp信号K-L正交分解各分量示意图

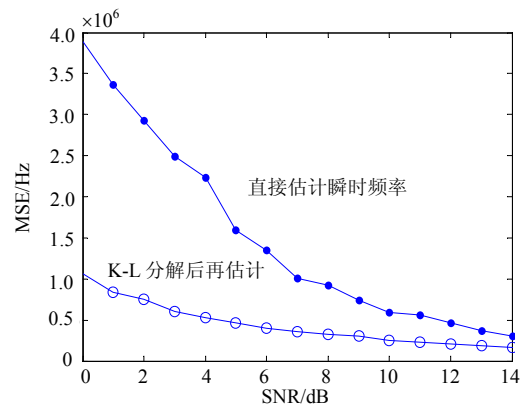


图3 瞬时频率估计的均方误差

3 结论与推广

本文通过Chirp信号的K-L正交分解,有效地去除了噪声,提高了瞬时频率的估计性能,能在低信噪比下较准确地估计Chirp信号的瞬时频率。本文方法需要预知Chirp信号的自相关矩阵,这使得该算法有一定局限性。但是在 N 较大、 m 较小时,可得到 $R(m)$ 的近似表达式:

$$R(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-m} s^*(n)s(n+m) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s^*(n)s(n+m) = e^{j(2\pi\alpha_b T_s m + \pi\mu T_s^2 m^2)} \frac{\sin(\pi\mu T_s m T)}{\pi\mu T_s m T} \quad (11)$$

由式(11)可知,Chirp信号的自相关函数的幅度由扫描频率 μ 决定,在 m 不大的时候,相位受载频影响也较小。这样,可以使该算法的应用范围得到较大的推广。对于雷达系统,采用固定扫描频率 μ 的Chirp信号,在接收回波信号时,信号由于受多普勒频移的影响,会产生载频偏移,但是该算法对频移不敏感,仍然能有效地去除噪声。对于BOK通信系统^[11],分别采用up-Chirp和down-Chirp来传输数据,扫描频率 μ 一正一负,但是绝对值相同,所以自相关矩阵也基本相同,用相同的正交分解矩阵 U 就可以同时降低up-Chirp和down-Chirp的噪声。因此,该算法具有一定的实用性和扩展性。

参 考 文 献

[1] COOK C. Pulse compression—The key to more efficient radar transmission[J]. Proc IRE, March, 1960, 48: 310-316.

- [2] SPRINGER A, Pohl A, GUGLER W, et al. A robust ultra broadband wireless communication system using saw chirped delay lines[J]. IEEE MTT-S Digest, 1998: 491-494.
- [3] MARTIN, A R. Chirp communication system United States: 4037159[P]. 1977-07-13.
- [4] SPRINGER A, GUGLER W, HUEMER M, et al. Spread spectrum communications using chirp signals[C]//AFCEA EUROCOMM, Munich: [s.n.], 2000: 166-170.
- [5] IEEE 802.15.4a WPAN Task Group. 802.15.4 standard. [EB/OL].[2007-03-22].Http://www.ieee802.org/15/pub/TG4 a. html.
- [6] Boashash B. Interpreting and estimating the instantaneous frequency of signal[J]. Part I, Fundamentals, Proc of IEEE, 1992, 80(4): 520-538.
- [7] 刘宏,杜文超,高学强. 相位拟合法在推算调频信号瞬时频率中的应用[J]. 导弹与航天运载技术, 2005, 9(4): 38-42.
- LIU Hong, DU Wen-chao, GAO Xue-qiang. Application of phase approaching in calculating instantaneous frequency of frequency modulated signal[J]. Missiles and Space Vehicles, 2005, 9(4): 38-42.
- [8] 陆林根. 宽带线性调频信号时频处理研究[J]. 现代雷达, 2002, 5: 39-41.
- LU Lin-gen. Study of the wide-band LFM signal time-frequency processing[J]. Modern Radar, 2002, 5: 39-41.
- [9] 潘继飞,姜秋喜,毕大平. Wigner-Ville分布及其在脉压雷达信号检测中的应用[J]. 电子对抗技术, 2005, 1(1): 15-18.
- PAN Ji-fei, JIANG Qiu-xi, BI Da-ping. Wigner-Ville distribute and its application in detection of PC radar signal[J]. Electronic Warfare Technology, 2005, 1(1): 15-18.
- [10] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004, 506-508.
- ZHANG Xian-da. Matrix analysis and applications[M]. Beijing: TsingHua University Press, 2004, 506-508.
- [11] BERNI A J, GREGG W D. On the utility of chirp modulation for digital signaling[J]. IEEE Trans on Commun, 1973, 21(6): 748-751.

编辑 张俊