

未知参数多项式相位信号的最优检测及性能

周良臣^{1,2}, 杨建宇², 唐 斌², 王建国², 李江源²

(1. 中国西南电子技术研究所 成都 610036; 2. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

【摘要】根据Neyman-Pearson(NP)准则, 利用广义似然比检验方法, 给出了未知参数多项式相位信号的最优检测器。在相位多项式次数分别为1或2时, 周期图、chirp傅里叶变换检测即为对应的最优检测器。推导了检验统计量的概率密度函数以及虚警概率和检测概率, 揭示了多项式相位信号检测中信号能量噪声比、信号参数空间中搜索点数、虚警概率和检测概率之间的关系。仿真结果验证了理论分析的有效性。

关键词 广义似然比检验; 纽曼-皮尔逊准则; T多项式相位信号; 检测概率; 虚警概率
中图分类号 TN957.51 **文献标识码** A

The Optimal Detection and Performance Analysis of Polynomial Phase Signal with Unknown Parameters

ZHOU Liang-chen^{1,2}, YANG Jian-yu², TANG Bin², WANG Jian-guo², and LI Jiang-yuan²

(1. Southwest China Institute of Electronic Technology Chengdu 610036;

2. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract By applying generalized likelihood ratio test (GLRT), This paper gives the detector of polynomial phase signal (PPS) with unknown parameters. The detector is optimal in Neyman-Pearson sense. When the power of phase polynomial is one or two respectively, periodogram and chirp Fourier transform method are the corresponding optimal detection methods. The probability density function, detection probability, and false detection probability are derived. Consequently the relationship between detection probability and false detection probability, signal energy to noise ratio, and the number of searching points in the parameter space are achieved. The simulation demonstrates the validness of the analysis.

Key words generalized likelihood ratio test; Neyman-Pearson criterion; polynomial phase signal; probability of detection; probability of false alarm

多项式相位信号(相位函数为多项式的信号)广泛存在于工程技术领域, 如SAR或ISAR回波、线性调频或一些非线性调频雷达的发射信号以及蝙蝠声音信号等均建模为多项式相位信号。对多项式相位信号检测与估计的研究是信号处理中的重要内容, 已经取得很多的成果。文献[1]给出了参数估计的Cramer-Rao界(CRB), 并提出多项式相位变换^[2-3](PPT)方法进行检测与估计。文献[4]指出了CRB与信号时间中点的关系, 完善了加性高斯白噪声多项式相位信号参数估计的精度理论。文献[5]提出PPT即是高阶模数函数, 但它在处理多分量多项式相位信号^[6]时, 难以解决相位多项式最高次项系数相同的多分量信号的识别问题。多时延高阶模数函数^[7]、乘积性高阶模数函数^[8]通过增加运算的冗余度, 可以有效地解决识别问题。单分量情况下, 通过解瞬

时相位和多项式拟合可完成高精度的参数估计^[9]。针对线性调频信号, 文献[10-14]分别提出了离散chirp傅里叶变换^[10]、分数阶傅里叶变换^[11]、子空间^[12]、马尔可夫链蒙特卡洛方法^[13]及演变算法^[14]等各种检测或估计方法。在时频分析方面, Wigner-Ville分布^[15]、多项式Wigner-Ville分布^[16]以及基于时-频平面时延-频偏平面的radon方法^[17]也各有特点。

多项式相位信号的处理方法给出了参数估计的CRB, 并重点围绕估计的高精度、小运算量或者低信噪比能力展开。在检测方面还未给出检测的最优性能。本文利用广义似然比检测, 推导了未知参数多项式相位信号最佳检测器及性能。由于在很多场合下, 确定各类错误的代价和先验概率均十分困难, 所以采用NP准则作为最佳准则。

1 多项式相位信号的恒虚警广义似然比检测

二元检测问题为:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0: & x_n = w_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \mathcal{H}_1: & x_n = s_n + w_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1)$$

式中 w_n 为方差为 σ^2 的零均值复高斯白噪声;
 $s_n = b_0 \exp\{j[a_0 + a_1(n\Delta) + a_2(n\Delta)^2 + \dots + a_M(n\Delta)^M]\}$,
 Δ 为采样间隔。信号幅度和所有相位参数均未知。
 令 $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$, $\boldsymbol{\theta}_0 = (a_0, a_1, \dots, a_M)^T \in \Omega$;
 $\varphi(\boldsymbol{\theta}_0, n) = a_1(n\Delta) + a_2(n\Delta)^2 + \dots + a_M(n\Delta)^M$ 。

相应的广义似然比检验为:

$$L_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \hat{b}_0, \hat{a}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x} | \mathcal{H}_0)} \begin{cases} > \gamma & \mathcal{H}_1 \\ < \gamma & \mathcal{H}_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中 门限 γ 由虚警概率确定。

广义似然比检测器为:

$$T_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\varphi(\hat{\boldsymbol{\theta}}, n)} \right|^2 = \begin{cases} > \gamma' & \mathcal{H}_1 \\ < \gamma' & \mathcal{H}_0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 \hat{b}_0 、 \hat{a}_0 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 分别为 b_0 、 a_0 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的最大似然估计;
 $\gamma' = \sigma^2 \ln \gamma$ 。

2 检测性能

令:

$$\xi_{\boldsymbol{\theta}} = \xi_{1,\boldsymbol{\theta}} + j\xi_{2,\boldsymbol{\theta}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\varphi(\boldsymbol{\theta}, n)} / \sqrt{N} \quad (4)$$

由于 \mathbf{x} 是独立同分布的高斯随机变量序列, 可知 $\xi_{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 均是高斯的。

在 \mathcal{H}_0 条件下, 可得 $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 均值、方差及互协方差为:

$$\begin{aligned} E\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0\} &= E\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0\} = 0 \\ \text{var}\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0\} &= \text{var}\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0\} = \sigma^2 / 2 \\ \text{cov}\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}, \xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0\} &= 0 \end{aligned}$$

可见 $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 是方差为 $\sigma^2 / 2$ 的零均值独立同分布高斯变量。所以, 在 \mathcal{H}_0 条件下 $T_{\boldsymbol{\theta}}$ 服从中心化的 χ^2 分布。令 $T'_{\boldsymbol{\theta}} = T_{\boldsymbol{\theta}} / (\sigma^2 / 2)$, 则可得检验统计量 $T_{\boldsymbol{\theta}}$ 归一化后的概率密度函数为:

$$p(T'_{\boldsymbol{\theta}} | H_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(-T'_{\boldsymbol{\theta}} / 2) & T'_{\boldsymbol{\theta}} > 0 \\ 0 & T'_{\boldsymbol{\theta}} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

另外, 在信号时宽足够的情况下易得 $T'_{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $T'_{\boldsymbol{\theta}_j}$

($\boldsymbol{\theta}_i \neq \boldsymbol{\theta}_j$) 相互独立。所以虚警概率为:

$$\begin{aligned} P_{\text{FA}} &= \Pr\left\{\max_i T'_{\boldsymbol{\theta}_i} > 2\gamma' / \sigma^2 \mid \mathcal{H}_0\right\} = \\ &= 1 - \Pr\left\{\max_i T'_{\boldsymbol{\theta}_i} < 2\gamma' / \sigma^2 \mid \mathcal{H}_0\right\} = \\ &= 1 - \Pr\left\{\bigcap_i T'_{\boldsymbol{\theta}_i} < 2\gamma' / \sigma^2 \mid \mathcal{H}_0\right\} = \\ &= 1 - \prod_i \Pr\left\{T'_{\boldsymbol{\theta}_i} < 2\gamma' / \sigma^2 \mid \mathcal{H}_0\right\} = \\ &= \Pr\left\{T'_{\boldsymbol{\theta}_i} < 2\gamma' / \sigma^2 \mid \mathcal{H}_0\right\} = \\ &= \int_0^{2\gamma' / \sigma^2} \frac{1}{2} \exp(-T / 2) dT = \\ &= 1 - \exp(-\gamma' / \sigma^2) \end{aligned}$$

因此有:

$$P_{\text{FA}} = 1 - \prod_i [1 - \exp(-\gamma' / \sigma^2)] = 1 - [1 - \exp(-\gamma' / \sigma^2)]^L \quad (6)$$

式中 L 为在空间 Ω 中考察的参数 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的个数, 即搜索点数。

设 $\boldsymbol{\theta}_0$ 包括在搜索点集合中, 在 \mathcal{H}_1 条件下可得 $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 的均值、方差及相应的互协方差为:

$$\begin{aligned} E\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}_0} | \mathcal{H}_1\} &= \sqrt{N} b_0 \cos a_0 \\ E\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}_0} | \mathcal{H}_1\} &\approx \sqrt{N} b_0 \sin a_0 \\ E\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1, \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0\} &\approx E\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1, \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0\} \approx 0 \\ \text{var}\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1\} &= \text{var}\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1\} = \sigma^2 / 2 \\ \text{cov}\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}, \xi_{2,\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1\} &\approx 0 \end{aligned}$$

可见在 \mathcal{H}_1 条件下, $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 是方差为 $\sigma^2 / 2$ 的独立同分布高斯变量。

当 $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$ 时, $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ 均值为零, 因而 $p(T_{\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_1, \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0) = p(T_{\boldsymbol{\theta}} | \mathcal{H}_0)$; 当 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ 时, $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}}$ (即 $\xi_{1,\boldsymbol{\theta}_0}$ 和 $\xi_{2,\boldsymbol{\theta}_0}$) 均值不为零, 所以 $T_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 服从非中心化 χ^2 分布。归一化的检测统计量 $T'_{\boldsymbol{\theta}_0} = T_{\boldsymbol{\theta}_0} / (\sigma^2 / 2)$ 的概率密度函数为:

$$p(T'_{\boldsymbol{\theta}_0} | H_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{-(\lambda + T'_{\boldsymbol{\theta}_0})}{2}\right] I_0(\sqrt{\lambda T'_{\boldsymbol{\theta}_0}}) & T'_{\boldsymbol{\theta}_0} > 0 \\ 0 & T'_{\boldsymbol{\theta}_0} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中非中心参量为:

$$\begin{aligned} \lambda &= [E^2\{\xi_{1,\boldsymbol{\theta}_0} | H_1\} / (\sigma^2 / 2)] + \\ &= [E^2\{\xi_{2,\boldsymbol{\theta}_0} | H_1\} / (\sigma^2 / 2)] = 2Nb_0^2 / \sigma^2 \end{aligned}$$

式中 λ 为信号能量噪声比的2倍; $I_0(\bullet)$ 为零阶 Bessel 函数。

与 \mathcal{H}_0 的情况类似, $T'_{\boldsymbol{\theta}_i}$ 、 $T'_{\boldsymbol{\theta}_j}$ ($\boldsymbol{\theta}_i \neq \boldsymbol{\theta}_j$) 相互独立,

检测概率为:

$$\begin{aligned}
 P_D &= 1 - \left[1 - \exp(-\gamma'/\sigma^2) \right]^{L-1} \Pr \{ T'_0 < 2\gamma'/\sigma^2 \mid \mathcal{H}_0 \} = \\
 &= 1 - \left[1 - \exp(-\gamma'/\sigma^2) \right]^{L-1} \times \\
 &= \int_0^{2\gamma'/\sigma^2} \frac{1}{2} \exp[-(\lambda+T)/2] I_0(\sqrt{\lambda T}) dT = \\
 &= 1 - \left[1 - \exp(-\gamma'/\sigma^2) \right]^{L-1} \left[1 - Q_1(\sqrt{\lambda}, \sqrt{2\gamma'/\sigma}) \right] = \\
 &= 1 - \frac{1 - P_{FA}}{1 - \exp(-\gamma'/\sigma^2)} \left[1 - Q_1(\sqrt{\lambda}, \sqrt{2\gamma'/\sigma}) \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中 $Q_1(\cdot, \cdot)$ 为Marcum函数^[18], 是非中心 χ^2 分布的右截尾概率。由式(6)可知, 对于小的 P_{FA} 必定有 $\exp(-\gamma'/\sigma^2) < 1$, 所以可得:

$$P_D \approx 1 - (1 - P_{FA}) \left[1 - Q_1(\sqrt{\lambda}, \sqrt{2\gamma'/\sigma}) \right] \quad (9)$$

分析式(6)、式(8)、式(9)可知, 在时宽足够时, 检测性能与 M 无关, 仅与搜索点数 L 和信号能量噪声比有关。

虚警概率与搜索点数 L 一定时, $2\gamma'/\sigma^2$ 也随之确定, 则检测概率仅与非中心参量 λ 有关。即虚警概率与搜索点数 L 一定时, 信号的能量噪声比 Nb_0^2/σ^2 决定了检测概率。能量噪声比越高, 检测概率越高。

虚警概率一定时, L 越大, 门限 γ' 越高。若能量噪声比一定, 则检测概率越小。在 $L=1$ 的情况下(即已知信号参数)检测概率最大。信号参数 θ_0 的未知给检测性能带来了不好的影响。

3 仿真与讨论

仿真信号为加性高斯白噪声中 N 点 M 次多项式相位信号($N=32, M=2$ 或 3)。集合 $\psi = (2\pi k_{1,i} f_s / N, 2\pi k_{2,i} f_s^2 / N, \dots, 2\pi k_{M,i} f_s^M / N)_{0 \leq k_{1,i}, k_{2,i}, \dots, k_{M,i} < M}$ 为均布于参数空间的 N^M 个点的总体, f_s 为采样率, 信号参数点 $\theta_0 = (a_1, a_2, \dots, a_M) \in \psi$, $a_0 = \pi/4$ 、 $b_0 = 1$ 。

当 $M=2$ 时, $\theta_0 = (10\pi k_{1,i} f_s / N, 10\pi f_s^2 / N)$; 当 $M=3$ 时, $\theta_0 = (10\pi k_{1,i} f_s / N, 10\pi f_s^2 / N, 10\pi f_s^3 / N)$ 。搜索集合 ψ_1 包含 ψ 中距离点 θ_0 最近的 L 个搜索点(包括点 θ_0 本身)。仿真中, 虚警概率 P_{FA} 分别取 10^{-2} 、 10^{-3} 、 10^{-4} 和 10^{-5} , λ (即2倍信号能量噪声比)取值从 $0 \sim 20$ dB以 0.5 dB为步长变化。在每个 λ 取值, 分别在各种虚警概率设定情况下, 进行 $500\ 000$ 次检测的 Monte-Carlo 仿真, 计算出各自的检测概率仿真结果, 并绘出 $\lambda \cdot P_D$ 曲线。设定 $L=64$, 对于 $M=2$ 或 3 , 仿真结果如图1所示, 倒三角表示 $M=2$ 的结果, 黑

点表示 $M=3$ 的结果。设定 $M=2$, $L=64$ 和 $L=1$ (即已知信号参数 a_1 、 a_2)的情况如图2所示, 倒三角表示 $L=64$ 的结果, 黑点表示 $L=1$ 的结果。

由图1和图2可知, 仿真结果与理论结果吻合。图中对一定的虚警概率, 检测概率曲线随信号能量噪声比增大而升高。

在图1中, M 分别为2和3的仿真结果完全一致, 这是由于检测器通过能量积累的方式消除了信号具体形式对检测性能的影响。

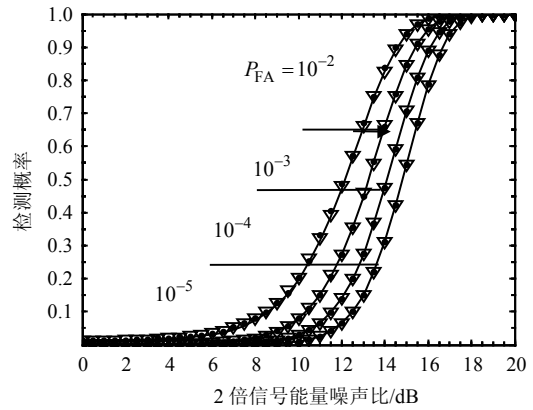


图1 未知参数 M 次多项式相位信号检测性能($L=64$)

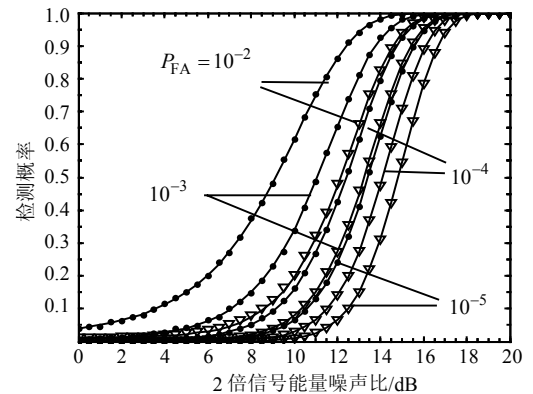


图2 未知参数二次多项相位信号检测性能

在图2中, 在相同的虚警概率情况下, $L=1$ 的检测概率总是高于 $L=64$ 的检测概率。这是因为在未知信号点 $\theta_0 = (a_1, a_2)$ 时, 选择集合 $\{|\xi_{\theta_i}|^2\}_{1 \leq i \leq L}$ 中最大值作为检验统计量。显然 L 个独立同分布的随机变量比相同分布的1个随机变量更容易超过同一门限, 所以在相同虚警概率设定下, 未知信号点 (a_1, a_2) 的恒虚警检测要求更高的门限(如式(6)所示); 另一方面, 在 \mathcal{H}_1 条件下, $|\xi_{\theta_i}|^2 (\theta_i \neq \theta_0)$ 大于 $|\xi_{\theta_0}|^2$ 的概率很小。上述原因导致已知 θ_0 时的检测性能优于未知 θ_0 时的检测性能。同理, 对于任意次多项式相位信号的检测, 在未知 θ_0 的情况下, θ_0 的不

确定度越小, 搜索范围越小, 检测性能相应地提高。

4 结束语

本文给出了高斯白噪声中未知参数复多项式相位信号的最优检测器。在时宽足够时, 检测性能与相位多项式的次数无关, 仅与信号空间中搜索点数和信号能量噪声比有关。相位多项式一次到最高次项的相位系数的不确定度越大, 所需搜索点数越多, 越不利于检测; 能量噪声比越高, 越有利于检测。

参 考 文 献

- [1] PELEG S, PORAT B. The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(3): 749-752.
- [2] PELEG S, PORAT B. Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(7): 607-615.
- [3] PELEG S, FRIEDLANDER B. The discrete polynomial-phase transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(8): 1901-1914.
- [4] RISTIC B, BOASHASH B. Comments on "The Cramer-Rao lower bounds for signals with constant amplitude and polynomial phase"[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(6): 1708-1709.
- [5] BARBAROSSA S, MASCOLO R. Autofocusing techniques for imaging moving targets by SAR based on a multilinear time-frequency representation[C]//Proceedings Radar 1994 International. Paris, France: [s.n.], 1994.
- [6] PELEG S, PORAT B. Estimation and classification of signals with polynomial phase[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, 37(3): 422-430.
- [7] BARBAROSSA S. Detection and estimation of the instantaneous frequency of polynomial phase signals by multilinear time-frequency representations[C]//Proceedings IEEE-SP Higher Order Stat. Lake Tahoe, CA, USA: IEEE, 1993.
- [8] BARBAROSSA S, SCAGLIONE A, GIANNAKIS G B. Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(3): 691-708.
- [9] DJURIC P M, KAY S M. Parameter estimation of chirp signals[J]. IEEE Transactions on Acoust, Speech and Signal Processing, 1990, 38(17): 2118-2126.
- [10] XIA Xiang-gen. Discrete chirp-fourier transform and its application to chirp rate estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(11): 3122-3133.
- [11] ALMEIDA L B. The fractional fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [12] BJORN V, BJORN O. Chirp parameter estimation from a sample covariance matrix[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(3): 603-612.
- [13] LIN Chung-chieh, DJURIC P M. Estimation of chirp signals by MCMC[C]//Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing Istanbul. Turkey: IEEE Signal Processing Society, 2000.
- [14] DHANOA J S, HUGHES E J, ORMONDROYD R F. Simultaneous detection and parameter estimation of multiple linear chirps[C]//Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Hong Kong: IEEE Signal Processing Society, 2003.
- [15] BARBAROSSA A. Detection and imaging of moving objects with synthetic aperture radar, part II: Joint time-frequency analysis by Wigner-Ville distribution[J]. IEE Proc Pt F, 1992, 139(1): 89-97.
- [16] BOASHASH B, O'SHEA P. Polynomial Wigner-Ville distribution and their relationship to time-varying higher spectra[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42: 216-220.
- [17] WANG M S, CHAN A K, CHUI C K. Linear Frequency-modulated signal detection using radon-ambiguity transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(3): 571-586.
- [18] HELSTROM C W. Computing the generalized marcum Q-function. information theory[J]. IEEE Transactions, 1992, 38(4): 1422-1428.

编辑 黄 莘