

· 电子机械工程 ·

## 混合威布尔分布参数估计的L-M算法

凌 丹<sup>1,2</sup>, 黄洪钟<sup>1</sup>, 张小玲<sup>1</sup>, 蒋工亮<sup>2</sup>

(1. 电子科技大学机械电子工程学院 成都 610054; 2. 重庆市交通运输工程重点实验室 重庆 南岸区 400074)

**【摘要】**混合威布尔分布模型常用来分析具有多种失效模式的机械系统或零部件的可靠性寿命数据, 为提高混合威布尔分布未知参数估计的精度, 利用非线性最小二乘理论, 建立了小子样条件下两重混合威布尔分布参数优化估计模型, 将L-M算法用于优化求解。以概率图参数估计法的结果作为迭代初始值, 提高了迭代求解的速度。计算实例表明利用该方法估计混合威布尔分布参数是可行的, 而且能够获得较精确的结果。

**关键词** L-M 算法; 混合威布尔分布; 非线性最小二乘; 参数估计  
**中图分类号** TB114.3 **文献标识码** A

## Parameters Estimation for Mixed Weibull Distribution Using L-M Algorithm

LING Dan<sup>1</sup>, HUANG Hong-zhong<sup>1</sup>, ZHANG Xiao-ling<sup>1</sup>, and JIANG Gong-liang<sup>2</sup>

(1. School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;

2. Chongqing Key Laboratory of Communication Engineering Nan'an Chongqing 400074)

**Abstract** Mixed Weibull distribution is usually used to model reliability of products with more than one failure modes. Due to the difficulty of estimation of distribution parameters, it has not been widely used. In this paper, a mixed model involving two Weibull distributions is considered; and its parameters estimation model is established using nonlinear least square theory. Levenberg-Marquardt algorithm is used to solve the optimization problem. To reduce iterative time, the estimator from graphical method is used as initial value. A numerical example is employed to illustrate the feasibility and accuracy of the proposed method.

**Key words** L-M algorithm; mixed Weibull distribution; nonlinear least square; parameter estimation

可靠性分析的首要问题在于寻找能够确切反映产品失效机理并与失效数据的分析结果相符合的失效分布规律<sup>[1]</sup>。常用的方法是将故障或失效数据拟合成某种分布形式, 在确定出各分布参数之后, 对失效数据进行可靠性评估和预测。威布尔分布是描述机械系统及其零部件寿命数据分布规律最常用的一种分布形式<sup>[2]</sup>。

复杂机械系统一般包含多个零部件, 每个零部件的故障可能是在多种失效机理共同作用下发生的, 而且在不同的寿命阶段, 不同的失效机理对系统的失效起主导作用, 其可靠性试验数据在威布尔概率纸上表现为曲线, 如果用原始的威布尔分布曲线来描述时, 会出现较大的误差。利用各种改进的威布尔模型可以较好地解决这类问题, 如混合分布

模型、分段模型和竞争风险模型等<sup>[3]</sup>。文献[4-5]总结了多种改进威布尔模型及其概率图特征, 并且提出了对于给定失效数据选取相应模型的方法。文献[6]详细讨论了两重混合威布尔模型、两重分段模型和两重竞争风险模型的概率图特征及其参数的图估计法。文献[7]采用混合威布尔模型描述了FIAT汽车零部件可靠性及其故障发生规律, 并且用极大似然方法估计其分布参数。

与原始的威布尔分布模型相比, 改进的威布尔分布模型虽然扩大了适用范围, 但是引入了较多的未知参数。统计分布的参数估计是一个优化问题, 未知参数越多, 优化问题的模型和求解过程越复杂, 研究各种改进威布尔分布模型的参数估计方法对复杂机械产品的可靠性分析是非常有意义的。随着计

收稿日期: 2008-03-20; 修回日期: 2008-05-30

基金项目: 国家863计划(2007AA04Z403); 国家自然科学基金(50775026); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20060614016)

作者简介: 凌 丹(1974-), 女, 博士生, 主要从事可靠性设计与智能优化方面的研究。

计算机计算能力的提高和数学软件的不断发展, 使改进的威布尔分布参数估计的复杂算法可行, 而且参数的估算结果也越来越精确。

本文以两重混合威布尔分布模型为研究对象, 利用非线性最小二乘法在小样本条件下仍能较好拟合试验数据的优点, 建立两重混合威布尔参数优化估计模型, 选用L-M算法求解该优化问题。

### 1 两重混合威布尔分布模型

如果一组数据样本  $T = \{t | t > 0\}$  服从两重混合威布尔分布, 设两重混合威布尔分布的概率密度函数为  $f(t)$ , 可以将其表示为两个威布尔分布的加权和<sup>[2-3]</sup>:

$$f(t) = pf_1(t) + (1-p)f_2(t) \tag{1}$$

式中  $p$  为加权因子;  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  分别为每个子分布的概率密度函数, 可表示为:

$$f_i(t) = \frac{\beta_i}{\alpha_i} t^{\beta_i-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha_i}\right)^{\beta_i}\right] \quad i=1,2 \tag{2}$$

式中  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) 为尺度参数;  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) 为形状参数。两重混合威布尔分布的可靠性函数可表示为:

$$R(t) = pR_1(t) + (1-p)R_2(t) \tag{3}$$

即:

$$R(t) = p \exp[-(t/\alpha_1)^{\beta_1}] + (1-p) \exp[-(t/\alpha_2)^{\beta_2}] \tag{4}$$

式(4)中的两重威布尔混合分布函数包含5个未知参数  $p$ 、 $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\beta_2$ 。对于  $n$  重混合分布, 则共有  $3n-1$  个未知参数。

混合威布尔分布的参数估计主要采用两种方法: 图估计法和极大似然估计法。图估计法将失效数据绘制在概率纸上, 用直观的绘直线和曲线的方法获取各分布参数估计值, 简单易行, 但易受主观因素影响, 当没有足够多的数据时, 会产生很大的偏差, 在小样本条件下不适用, 其结果可作为优化估计算法中的初值<sup>[8-9]</sup>。极大似然估计方法是一种渐进优化方法, 在参数的可能取值范围内, 选取使极大似然函数达到最大的参数值作为待求的参数估计值。极大似然法的缺点是在优化计算过程中容易陷入局部极小, 而无法找到全局最优点。文献[10]将贝叶斯方法与极大似然估计方法相结合, 提高了参数估计的准确性和运算速度, 并且适用于小样本情形。

### 2 混合威布尔参数优化估计方法

#### 2.1 基于非线性最小二乘法的参数优化估计模型

非线性最小二乘法以“误差平方总和为最小”的估计准则, 估计非线性模型的参数, 目前已广泛

应用于试验数据的拟合与分析。对于较小的数据样本, 利用非线性最小二乘法仍然能够获得较好的拟合结果<sup>[11]</sup>。用  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$  表示两重混合威布尔分布的参数向量, 分别代表未知参数  $p$ 、 $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\beta_2$ , 式(4)可以改写为:

$$R(t, \mathbf{x}) = x_1 \exp[-(t/x_2)^{x_3}] + (1-x_1) \exp[-(t/x_4)^{x_5}] \tag{5}$$

为了推断分布参数  $\mathbf{x}$  与可靠度  $R$  之间的关系, 建立其非线性最小二乘优化估计模型为:

$$\begin{aligned} \min g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n r_j(\mathbf{x})^2 \\ 0 &< x_1 < 1 \\ 0 &< x_i \quad i=2,3,4,5 \end{aligned} \tag{6}$$

式中  $r_j(\mathbf{x})$  为残差, 可表示为:

$$r_j(\mathbf{x}) = \tilde{R}(t_j) - R(t_j, \mathbf{x}) \quad 1 < j < n \tag{7}$$

其中  $\tilde{R}(t_j)$  为可靠度的中位秩估计值:

$$\tilde{R}(t_j) = 1 - \frac{j-0.3}{n+0.4} \quad 1 < j < n \tag{8}$$

为求解式(6)中的约束优化问题, 令:

$$x_1 = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_1) + \exp(-z_1)} \tag{9}$$

$$x_i = \exp(z_i) \quad i=2,3,4,5 \tag{10}$$

将式(9)和式(10)代入式(6), 令:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T \tag{11}$$

则:

$$\begin{aligned} R(t, \mathbf{z}) &= \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_1) + \exp(-z_1)} \exp\{-[t/\exp(z_2)]^{\exp(z_3)}\} + \\ &\left(1 - \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_1) + \exp(-z_1)}\right) \exp\{-[t/\exp(z_4)]^{\exp(z_5)}\} \end{aligned} \tag{12}$$

式(6)中的约束最小二乘问题转变为无约束优化问题, 有:

$$\min g(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j^2(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [\tilde{R}_j - R(t_j, \mathbf{z})]^2 \tag{13}$$

求出最优解  $\mathbf{z}^*$  后, 利用式(9)和式(10)可以求出5个未知参数的数值。

#### 2.2 用L-M算法求解

求解非线性最小二乘常用的方法是迭代法, 给定初始值  $\mathbf{z}^{(0)}$ , 根据某种迭代算法寻找最优点, 如牛顿法、高斯-牛顿法、L-M (Levenberg-Marquardt) 算法等。L-M算法采用目标函数的二阶微分, 并采用了一个方向矢量来不断地调整计算的收敛方向, 以获得更好的收敛性<sup>[11]</sup>。普通的梯度算法仅使用目标函数的一阶微分, 收敛的方向始终是目标函数的梯

度方向, 收敛速度较慢。L-M的迭代算法为:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - [J(\mathbf{z}^{(k)})^T J(\mathbf{z}^{(k)}) + \lambda^{(k)} \text{diag}(J(\mathbf{z}^{(k)})^T J(\mathbf{z}^{(k)}))]^{-1} J(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (14)$$

其中  $\mathbf{r}(\mathbf{z})$  称为残差矢量:

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}) = (r_1(\mathbf{z}), r_2(\mathbf{z}), \dots, r_m(\mathbf{z}))$$

$J(\mathbf{z}^{(k)})$  为目标函数  $g(\mathbf{z})$  在  $\mathbf{z}^{(k)}$  处的Jacobi矩阵:

$$J(\mathbf{z})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \frac{\partial r_2(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial r_n(\mathbf{z})}{\partial z_1} \\ \frac{\partial r_1(\mathbf{z})}{\partial z_2} & \frac{\partial r_2(\mathbf{z})}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial r_n(\mathbf{z})}{\partial z_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial r_1(\mathbf{z})}{\partial z_m} & \frac{\partial r_2(\mathbf{z})}{\partial z_m} & \dots & \frac{\partial r_n(\mathbf{z})}{\partial z_m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

L-M算法的具体步骤如下:

(1) 令  $k=0$ , 给定初始值  $\mathbf{z}^{(k)}$ , 迭代精度  $\varepsilon_{\text{stop}}$ , 初始步长  $\lambda^{(k)}$ 。(2) 计算  $\mathbf{r}(\mathbf{z}^{(k)})$  和  $J(\mathbf{z}^{(k)})$ , 令  $\mathbf{A} = J(\mathbf{z}^{(k)})^T J(\mathbf{z}^{(k)})$ ,  $\mathbf{B} = J(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}(\mathbf{z}^{(k)})$ 。(3) 根据式(15)计算  $\mathbf{z}^{(k+1)}$ , 并计算式(14)中目标函数  $g^{(k+1)}$  的值。(4) 如果  $g^{(k+1)} \leq \varepsilon_{\text{stop}}$ , 最优解  $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}^{(k+1)}$ , 迭代结束; 否则, 转到步骤(5)。(5) 如果  $g^{(k+1)} \geq g^{(k)}$ , 改变步长, 令  $\lambda^{(k)} = 10\lambda^{(k)}$ , 转到步骤(7)。(6) 如果  $g^{(k+1)} < g^{(k)}$ , 改变步长, 令  $\lambda^{(k)} = 0.1\lambda^{(k)}$ , 转到步骤(7)。(7) 令  $k=k+1$ , 重复步骤(2)。

虽然迭代算法中包含复杂的矩阵运算, 随着计算机处理能力和计算速度的提高, 算法的复杂性已经不再是限制其使用和推广的瓶颈问题了。

### 3 算例

为将本文中的方法与原有方法比较, 采用文献[10]中使用的寿命实验数据, 如表1所示。为提高收敛速度和求解精度, 利用文献[10]图估计法的结果作为迭代初始值, 表2中列出了分别采用文献[10]中的Kececioglu方法、图估计法和L-M算法得到的结果。为了比较不同方法拟合寿命数据的精确程度, 采用统计学中常用的相对均方差(normalized root mean square error, NRSME) 作为评价指标<sup>[11]</sup>:

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\tilde{R}(t_i) - \hat{R}(t_i)]^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{R}(t_i)^2}} \quad (16)$$

式中  $\hat{R}(t_i)$  为根据参数估计结果得出的  $R(t_i)$  计算值。表3列出了3种方法的NRMSE值的比较, 可以看出, L-M参数估计算法有最小的NRSME数值, 因此

最为精确。

表1 某产品的可靠性寿命实验数据

序号 <i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
失效时间/ <i>t/h</i>	3.0	28.5	71.6	91.1	129.1	157.8	188.9	226.1	278.0	367.2

表2 3种不同方法参数估计结果

参数	$\hat{\rho}$	$\hat{a}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{\beta}_2$	$D_{\text{max}}$
图估计法	0.300	39.4	0.60	233.5	2.30	0.075 0
Kececioglu方法	0.300	50.0	0.50	193.0	1.90	0.032 0
L-M算法	0.255	40.5	0.49	211.95	1.85	0.021 1

表3 3种不同方法可靠度估计值比较

序号 <i>i</i>	失效时间/ <i>t/h</i>	可靠度中位秩	3种不同方法的可靠度估计值 $\hat{R}(t_i)$		
			图估计法	Kececioglu方法	L-M算法
1	3.0	0.932 7	0.942 3	0.934 6	0.937 3
2	28.5	0.836 5	0.826 2	0.822 8	0.836 8
3	71.6	0.740 4	0.727 0	0.692 0	0.719 3
4	91.1	0.644 2	0.681 5	0.628 3	0.661 6
5	129.1	0.548 1	0.581 0	0.499 5	0.543 2
6	157.8	0.451 9	0.496 5	0.404 7	0.453 8
7	188.9	0.355 8	0.401 9	0.311 0	0.362 6
8	226.1	0.259 6	0.293 9	0.217 1	0.266 7
9	278.0	0.163 5	0.169 1	0.123 1	0.162 8
10	367.2	0.067 3	0.047 8	0.043 5	0.060 8
NRMSE			0.002 6	0.004 1	0.000 3

## 4 结论

本文利用非线性最小二乘理论能够拟合各种复杂试验数据的优点, 在小样本条件下, 建立了两重混合威布尔分布的参数优化估计模型, 并用L-M优化算法寻求最优解。通过与图估计法和Kececioglu方法的计算结果比较, 本文的方法能够获得较精确的结果。通过适当的变换, 本文提出的方法也可以应用到其他几种改进威布尔分布的参数估计中。

### 参考文献

- [1] NELSON W. Applied life data analysis [M]. New York: Wiley, 1982.
- [2] MURTHY D N P, XIE M, JIANG R Y. Weibull models [M]. New York: Wiley, 2003.
- [3] BUCAR T, NAGODE M, FAJDIGA M. Reliability approximation using finite Weibull mixture distributions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 87(3): 241-251.

(下转第640页)

测器的探测性能。

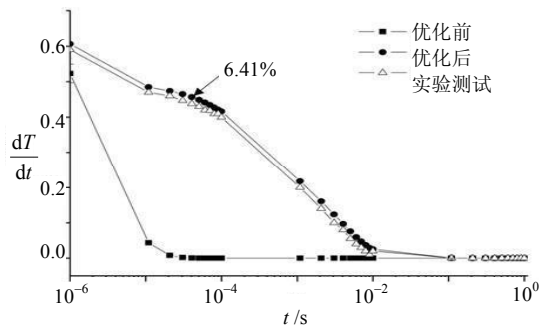


图7 优化前、后和实验测试3种温度变化率的对比

### 3 结束语

本文利用有限元软件ANSYS对LiTaO<sub>3</sub>薄膜红外探测器进行了热分析。根据试验的条件,对不同绝热层的热导率、绝热层厚度、基底材料及基底厚度的模型分别进行了瞬态热分析,得出以下结论:探测器的响应与绝热层的厚度成正比,并与绝热层的热导率成反比;蓝宝石或镍作为基底优于硅;在绝热层的厚度为2 μm时,硅基底的厚度对探测器的响应可忽略不计。仿真结果表明,优化后探测器的响应性能有较大幅度的提高。实验测试热响应结果与仿真结果十分吻合,证实优化后模型是有效的。

#### 参考文献

[1] LI Jin-hua, YUAN Ning-yi, LI kun. Properties of sol-gel PZT film based on Indium-Tin oxide substrate[J]. *Ferroelectrics*, 2001, 260(1-4): 533-538.

[2] ARAKAWA S, NITTA H, HAYASHI S. Synthesis of lanthanum lithium tantalate powders and thin films by the sol-gel method[J]. *Journal of Crystal Growth*, 2001, (231): 290-294.

[3] ROGALSKI A. Infrared detectors: An overview[J]. *Infrared Physics & Technology*, 2002,(43): 187-210.

[4] LIENHARD D, PLOSS B. A matrix formalism for the simulation of pyroelectric sensors[J]. *Journal of Applied Physics*, 1995, (171): 5426-5433.

[5] 李 靛, 姚 喜, 张良莹. 非制冷薄膜红外探测器绝缘结构的研制[J]. *半导体学报*, 2004, 25(7): 847-851.

LI Liang, YAO Xi, ZHANG Liang-ying. Fabrication of thermal insulation structure for uncooled pyroelectric thin film IR detector[J]. *Chinese Journal of Semiconductors*, 2004, 25(7): 847-851.

[6] 杨建明, 吴小清, 姚 熹. 热释电红外探测器吸收层研究[J]. *红外技术*, 2002, 24(4): 53-54.

YANG Jian-ming, WU Xiao-qing, YAO Xi. Absorbing layers of pyroelectric infrared detectors[J]. *Infrared Technology*, 2002, 24(4): 53-54.

[7] LIU Shi-jian, ZENG Xiang-bin, CHU Jun-hao. Thermal-sensitive BST thin film capacitors for dielectric bolometer prepared by RF magnetron sputtering[J]. *Microelectronics Journal*, 2004, 35(7): 601-603.

[8] KOHLI C H, PRASAD J K, SCHMID P E, et al. Characterization of lithium tantalite thin films sputter-deposited onto RuO<sub>2</sub>/Si substrates[J]. *Microelectronic Engineering*, 1995, 29: 201-204.

[9] CARDARELLI F. *Materials handbook*[M]. London: Springer, 1999.

[10] ZHU Yong-yuan, ZHANG Zhi-yong, GU Ming, et al. Curie temperature and domain inversion in proton exchanged LiTaO<sub>3</sub>[J]. *Materials Letters*, 1996, 27: 333-335.

编辑 黄 莘

(上接第636页)

[4] MURTHY D N P, BULMER M, ECCLESTON J A. Weibull model selection for reliability modeling[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, 86(3): 257-267.

[5] PHAM H, LAI C D. On recent generalizations of the Weibull distribution [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2007, 56(3): 454-458.

[6] JIANG R Y, MURTHY D N P. Reliability modeling involving two Weibull distributions[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1995, 47(3): 187-198.

[7] ATTARDI L, GUIDA M, PULCINI G. A mixed-Weibull regression model for the analysis of automotive warranty data[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2005,

87(2): 265-273.

[8] JIANG S Y, KECECIOGLU D. Graphical representation of two mixed Weibull distribution[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1992, 41(2): 241-247.

[9] JIANG R Y, MURTHY D N P. Modeling failure-data by mixture of 2 weibull distribution: a graphical approach[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1995, 44(3): 477-488.

[10] KECECIOGLU D, WANG W D. Parameter estimation for mixed-weibull distribution[C]//*Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium 1998*. Florida: IEEE, 1998: 247-252.

[11] NOCEDAL J, WRIGHT S J. *Numerical optimization*[M]. Berlin: Springer, 1999.

编辑 税 红