

# LDPC编码的最优化HARQ方案研究

李学华<sup>1,2</sup>, 李振松<sup>1</sup>, 杨大成<sup>1</sup>, 缪旻<sup>2</sup>

(1. 北京邮电大学电信工程学院 北京 海淀区 100876; 2. 北京信息工程学院信息与通信工程系 北京 朝阳区 100101)

**【摘要】**使用高斯近似和最优化理论的方法,对基于LDPC码度分布的混合自动重发请求(HARQ)方案的性能进行了研究。研究表明,根据LDPC编码的度分布和初始信道条件,能够确定一个编码码字中各个度数的比特所对应的最优的重发比例,如果按照该比例进行重发,重发功率的效率能够最大化。计算结果显示基于LDPC码度分布的混合自动重发请求方案具有最优的重发比例,是一种最优化方案。

**关键词** 度分布; 高斯近似; 混合自动重发请求; 低密度奇偶校验码

**中图分类号** TN929.533 **文献标识码** A

## Research on Optimal HARQ Scheme for LDPC

LI Xue-hua<sup>1,2</sup>, LI Zhen-song<sup>1</sup>, YANG Da-cheng<sup>1</sup> and MIAO Min<sup>2</sup>

(1. School of Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications Haidian Beijing 100876;

2. Department of Information & Telecommunication Engineering, Beijing Information Technology Institute Chaoyang Beijing 100101)

**Abstract** By analyzing the degree distribution of low density parity check (LDPC) codes in definite quantity with gaussian approximation (GA) and optimal method, the performance of degree distribution for LDPC codes is investigated. Research results show that when the initial channel state and degree distribution of the LDPC codes are known, the optimal retransmission fractions can be determined. Maximum retransmission efficiency would be achieved if bits can be retransmitted according to these fractions. Calculation results reveal that the retransmission fractions in degree distribution based hybrid automatic repeat quest (DDB-HARQ) scheme are optimal.

**Key words** degree distribution; Gaussian approximation; hybrid automatic repeat quest; low density parity check codes

未来的数字移动通信系统为了保证数据业务的传输质量,除了要使用先进的纠错编码技术之外,还必须采用有效的差错控制协议,如自动重发请求(ARQ)<sup>[1]</sup>。而将信道编码和ARQ这两种技术结合起来的混合自动重发请求(HARQ)<sup>[2]</sup>机制可以保证较高系统传输效率,因而在实际的系统中已经获得了广泛的应用。低密度奇偶校验(LDPC)码<sup>[3]</sup>是一种接近香农限性能,并且与Turbo码相比译码复杂度较低的码。LDPC码已经在DVB-S2等系统中得到应用,而且被列为了下一代移动通信系统的关键技术之一,故采用LDPC编码的HARQ技术已经成为研究热点。

文献[4]提出了一种基于非规则LDPC码度分布的HARQ方案(DDB-HARQ)。该方案是一种选择性的HARQ方案,即每次重发的比特都是第一次编码后的一部分,而不需要重新编码,对选择度(degree)

大的节点优先重发。这种选择方法与Type I HARQ相比能带来可观的系统增益,而与文献[5-6]提出的基于可靠度(reliability-based)的HARQ方案相比,因为不需要反馈链路而复杂度更低。本文使用高斯近似(Gaussian approximation)和最优化理论的方法找到能使重发功率效率最大的最优重发比例,对DDB-HARQ方案的性能进行了定量分析,得到了最优化方案的结论。

## 1 问题描述

作为线性分组码,非规则LDPC码既可以用校验矩阵来描述,也可以用二分图来表示。在二分图中,变量节点和校验节点之间的连接边数目并不是固定的,具体的分布可以用度分布对函数 $(\lambda, \rho)$ 表示,它是影响LDPC码性能最重要的参数<sup>[7-8]</sup>。文献[4]定性地指出重发度分布较大的节点对系统译码性能增益

收稿日期: 2007-09-24; 修回日期: 2008-03-04

基金项目: 国家自然科学基金(60501007); 北京市科技计划项目(2006A44)

作者简介: 李学华(1977-),女,博士生,主要从事信道纠错技术方面的研究。

较大,因此度分布较大的节点被优先重发,以获得更大的重发功率效率。根据这种方案,在第一次发送之后,整个帧内的比特根据度分布的大小降序重新排列,并被等分为 $n$ 个子包。当需要重发时,发送端按顺序每次发送1个子包,接收端收到数据之后,与之前收到的数据合并,重新进行解码尝试直到成功解码或者达到最大重发次数。

显然,这种方案并没有考虑变量节点的具体重发比例。然而重发比例对于译码收敛是一个非常重要的参数,因此这种方案究竟能将重发功率效率提高到什么程度,还需要进一步定量的分析研究。

为了确定最优的重发比例,本文仍然对整个帧内的比特按度大小的降序重新排列。与DDB方案不同的是,该帧不是被等分为 $n$ 个子包,而是被当作是一个变量节点的集合,按照度的大小来进行子集划分,即具有相同度数的变量节点被划分为一个子集。如图1所示,每个子集对应一个最优的重发比例 $p_i$ ,该比例由一个最优化模型来产生,该模型能够根据信道条件和度分布函数给出使系统重发功率效率最大化的重发比例序列。

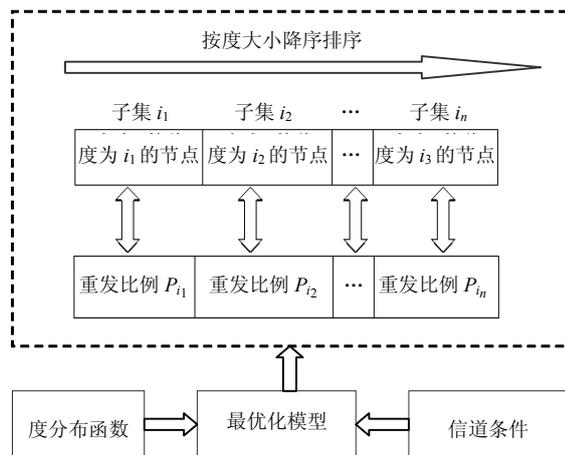


图1 分析模型示意图

如选择 $N_{re}$ 个比特进行重发,那么每个子集中的前 $N_{re} \times p_i$ 个比特将会被依次选出并组成一个子包进行重发。显然这时的重发比特还是按度大小的降序排列的,所以不需要发送位置信息,在接收端就可以完成合并,再重新进行解码尝试直到成功解码或者达到最大重发次数。

## 2 性能分析

本文使用如下AWGN信道模型进行分析,假设采用BPSK调制方式:

$$y = x + n \quad (1)$$

式中  $x \in \{\pm 1\}$  为信源发送的消息;  $n$  为均值为0,方差为 $\sigma_n^2$ 的噪声;  $y$  为译码器的接收信号。

本文使用高斯近似理论<sup>[9]</sup>来分析系统的性能。高斯近似理论利用了消息符合高斯(混合)分布特性,因而在精度没有很大损失的前提下大大简化了密度进化理论,使得定量分析LDPC译码收敛特性大为简化。根据高斯近似理论,对于某一给定的信道条件,LDPC码的译码门限值完全由其度分布特性确定。

度分布多项式 $(\lambda(x), \rho(x))$ 定义为:

$$\lambda(x) = \sum_{i=2}^{d_l} \lambda_i x^{i-1} \quad \rho(x) = \sum_{j=2}^{d_r} \rho_j x^{j-1}$$

式中  $\lambda_i$  和  $\rho_j$  分别为度为 $i$ 的变量节点和度为 $j$ 的校验节点的相邻边数占总边数的比例,称为度分布系数;  $d_l$  和  $d_r$  分别为变量节点和校验节点的最大度数。

由文献[9]可以得到在第 $l$ 次译码迭代中由变量节点输出的消息均值 $r_l$ 满足关系:

$$r_l = \sum_{i=2}^{d_l} \lambda_i \phi \left( s + (i-1) \sum_{j=2}^{d_r} \rho_j \phi - 1(1 - (1 - r_{l-1})^{j-1}) \right) \quad (2)$$

信道的初始化条件由 $r_0 = \phi(s_0)$ 给出,并且:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int \tanh \frac{u}{2} e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}} du & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

式中  $\phi(x)$  在 $[0, +\infty]$ 上为单调递减函数;  $s_0 = m_{u_0}$  是信道初始状态。对于式(1)所示的信道模型,有 $m_{u_0} = 2/\sigma_n^2$ , 因此:

$$s_0 = \frac{2}{\sigma_n^2} \quad (3)$$

根据高斯近似理论,对于一个特定的度分布和信道类型存在一个信噪比的门限值,当发送端的发送信噪比高于此门限值时,理论上在无限次迭代之后解码器总是能无错地解码。即当迭代次数 $l$ 趋于无穷时, $r_l$ 收敛于0,此时LDPC码处于无错区域(error free region)。反之,当发送信噪比低于门限值,则无论多少次迭代,错误都是不可避免的,此时 $r_l$ 收敛于一个非零常数。

为了分析基于LDPC编码度分布的HARQ方案的性能,设 $p_i$ 为度为 $i$ 的变量节点所对应的重发比例,它表示从这些度为 $i$ 的节点中选出的重发比特数 $N_{i,re}$ 占总的重发比特数 $N_{re}$ 的比例,即:

$$p_i = \frac{N_{i,re}}{N_{re}} \quad (4)$$

显然,重发时不同的比特选择方式所对应的重发比例 $p_i$ 是不同的。

接收端将重发的比特与先前的数据进行软合并,增大了信道的初始状态 $s_0$ ,从而使得译码门限值降低,加速了译码的收敛。因此重发后对应的信道初始状态为:

$$r_i = r_{i-1} \sum_{j=2}^{d_i} \left[ \lambda_j \phi(s_i)(i-1) \left( \sum_{j=2}^{d_r} \rho_j(j-1) - \frac{(j-1)(j-2)}{2} r_{i-1} \right) \right] \quad (7)$$

为了分析无限次迭代的渐进性能,求极限:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{r_l}{r_{l-1}} = \sum_{i=2}^{d_i} \lambda_i(i-1)\phi(s_i) \quad (8)$$

式中  $\eta = \sum_{j=2}^{d_i} \rho_j(j-1)$ , 对于某一给定的LDPC码来说是一个常数,与 $i$ 无关。

式(8)表明,当 $l$ 趋于无穷时, $r_l$ 是一个几何过程。极限的取值由 $\lambda_i$ 和 $s_i$ 组成,其中 $\lambda_i$ 对于某一给定的度分布来说是常数, $s_i$ 与重发比例 $p_i$ 有关,也就是与重发比特的选择方法有关。

因此, $r_l$ 可以表示为:

$$r_l = K^l r_0 \quad (9)$$

式中  $K = \eta \sum_{i=2}^{d_i} [\lambda_i(i-1)\phi(s_i)]$ 。

由式(9)可以看到, $K$ 的值越小,译码收敛的速度越快,这也意味着重发的功率效率更高。根据上面的分析,对于某一给定的度分布多项式 $(\lambda(x), \rho(x))$ 和信道初始条件 $s_0$ , $K$ 的取值只与重发比例 $p_i$ 有关。因此,为了求出在何种情况下重发的功率效率达到最大,就需要找出使 $K$ 趋于极小值的重发比例 $p_i$ 。假设:

$$F(s_i) = \sum_{i=2}^{d_i} [\lambda_i(i-1)\phi(s_i)] \quad (10)$$

把式(5)代入式(10),得到:

$$F(p_i) = \sum_{i=2}^{d_i} [\lambda_i(i-1)\phi((1+p_i)s_0)] \quad (11)$$

式中  $s_0 = 2 \times 10^{\frac{(\text{SNR})_{\text{dB}}}{10}}$ 。当 $F(p_i)$ 趋近于极小值时, $K$ 也取极小值,但是 $p_i$ 要受到一定的条件约束,因此这是一个条件极值的问题。首先, $p_i$ 要满足  $\sum_{i=2}^{d_i} p_i = 1$  和  $0 \leq p_i < 1$ ;其次被重发的度为 $i$ 的比特数 $N_{i,\text{re}}$ 应该不大于度为 $i$ 的比特总数 $N_i$ 。

为了确定约束条件,设 $N$ 为码长, $N_{\text{re}}$ 为某次重发的总比特数,那么:

$$s_i = (1+p_i)s_0 \quad (5)$$

在HARQ接收端,经过软合并之后的式(2)变为:

$$r_i = \sum_{i=2}^{d_i} \lambda_i \phi \left( s_i + (i-1) \sum_{j=2}^{d_r} \rho_j \phi^{-1} (1 - (1-r_{i-1})^{j-1}) \right) \quad (6)$$

根据文献[10],可以将式(6)简化为:

$$N_i = N \frac{\lambda_i / i}{\sum_{j=2}^{d_i} \lambda_j / j} \quad (12)$$

显然,有:

$$N_{i,\text{re}} = N_{\text{re}} p_i \leq N_i \quad (13)$$

合并式(12)和式(13),得到不等式:

$$p_i \leq \frac{N}{N_{\text{re}}} \frac{\lambda_i / i}{\sum_{j=2}^{d_i} \lambda_j / j} \quad (14)$$

根据上述分析,建立最优化模型:

$$\min F(p_i) = \sum_{i=2}^{d_i} [\lambda_i(i-1)\phi((1+p_i)s_0)] \quad (15)$$

- s.t (1)  $\sum_{i=2}^{d_i} p_i = 1$ 。
- (2)  $0 \leq p_i < 1 (1 < i \leq d_i)$ 。
- (3)  $p_i \leq \frac{N}{N_{\text{re}}} \frac{\lambda_i / i}{\sum_{j=2}^{d_i} \lambda_j / j}$ 。

式中  $F(p_i)$ 为目标函数,它受到以上3个约束条件的限制。直接用代数方法求解该目标函数条件极小值是十分困难的,所以本文引入文献[7]中函数 $\phi(x)$ 的简化形式:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(-0.4527x^{0.86} + 0.0218) & 0 < x < 10 \\ \sqrt{(\pi/x)} e^{-0.25x} (1 + 1/14x - 3/2x) & x \geq 10 \end{cases} \quad (16)$$

将该简化形式带入式(15)的目标函数中,再利用某些最优化的工具,如LINGO软件(LINGO软件主页: [www.lindo.com](http://www.lindo.com)),当给定某个度分布和信道初始条件 $s_0$ 时,可以求解出 $F(p_i)$ 条件收敛于极小值时 $p_i$ 的取值。从而为判断基于LDPC码度分布的HARQ方案的性能是否为最优提供了依据。

### 3 数值计算

根据上述分析,式(15)模型计算了最优的重发比例。所使用的LDPC码码长为1024,码速率为0.49,

校验矩阵为 $518 \times 1024$ , 用比特填充法构造, 帧长1024, 假设一次重发256 bit(四分之一帧), 其度分布为:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 0.2647x + 0.2406x^2 + 0.1588x^5 + \\ &0.0862x^6 + 0.033x^{13} + 0.2163x^{14} \\ \rho(x) &= 0.6351x^6 + 0.3649x^7 \end{aligned} \quad (17)$$

根据文献[4]中的DDB-HARQ方案, 第一次重发度总和最大的前256 bit, 根据重发比例的定义式(4), 可以计算出 $p_i$ 的值。按照式(15)的分析结论, 利用LINGO软件, 计算出不同SNR值所对应的目标函数 $F(p_i)$ 的极小值, 以及相应的重发比例 $p_i$ 。计算结果如表1所示。从计算结果可以发现两者的重发比例值是完全相同的。也就是说在这种度分布的情况下, 按照文献[4]中提出的DDB-HARQ方式进行选择重发, 功率效率可以达到理论的最优值。

表1 最优化结果与DDB-HARQ的重发比例值

DDB		$p_2$	$p_3$	$p_6$	$p_7$	$p_{14}$	$p_{15}$	$F(p_i)$
最优结果		0	0.17	0.39	0.18	0.035	0.21	
SNR/dB	$s_0$	$p_2$	$p_3$	$p_6$	$p_7$	$p_{14}$	$p_{15}$	
1.0	2.5	0	0.17	0.39	0.18	0.035	0.21	1.74
2.0	3.2	0	0.17	0.39	0.18	0.035	0.21	1.35
3.0	4.0	0	0.17	0.39	0.18	0.035	0.21	0.98

为了验证结果的普遍性, 本文对多种度分布进行了计算, 都得到了同样的结果, 即DDB方案中的重发比例与最优重发比例相同。

## 4 结论

根据LDPC码的度分布和初始信道条件, 使用高斯近似的方法构造最优化模型, 能够确定一个编码码字中各个度数的比特所对应的最优重发比例, 按照该比例进行重发, 能够最大化重发的功率效率。计算结果表明, DDB-HARQ方案具有最优的重发比例, 能获得最佳重发功率效率, 是一种最优化方案。

## 参 考 文 献

- [1] 姜明, 赵春明, 刘占利. 基于数据打孔混合ARQ方案的低密度奇偶校验码构造方法[J]. 东南大学学报, 2006, 36(2): 198-201.  
JIANG Ming, ZHAO Chun-ming, LIU Zhan-li. On construction of LDPC codes based on data puncturing hybrid ARQ[J]. Journal of Southeast University, 2006, 36(2): 198-201.
- [2] 王单, 王新梅. 基于II型H-ARQ系统速率可变低密度校验码的设计与研究[J]. 通信学报, 2006, 27(1): 59-63.  
WANG Dan, WANG Xin-mei. Design of rate-compatible low-density parity-check codes for type-II hybrid ARQ systems[J]. Journal of China Institute of Communications, 2006, 27(1): 59-63.
- [3] 李强, 李少谦. 级联LDPC码和CCK的编码调制性能分析[J]. 电子科技大学学报, 2003, 32(5): 578-582.  
LI Qiang, LI Shao-qian. Performance analysis of coded modulation concatenated CCK and low-density parity-check code[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2003, 32(5): 578-582.
- [4] CAO Y Q, GU J, QI L, et al. Degree distribution based HARQ for irregular LDPC[J]. IEE Elec Lett, 2006, 42(6): 363-364.
- [5] SHEA J M. Reliability-based Hybrid ARQ[J]. IEE Elec Lett, 2002, 38(6): 644-645.
- [6] ROONGTA A, SHEA J M. Reliability-based Hybrid ARQ using convolutional codes[C]//IEEE International Conference on Communications. USA: Anchorage, 2003, 4: 2889-2893.
- [7] CHUNG S Y, FOMEY G D, RICHARDSON T J, et al. On the design of low-density parity-check codes within 0.045 dB of the Shannon limit[J]. IEEE Comm Lett, 2000, 5(2): 58-60.
- [8] CHUNG S Y, RICHARDSON T J, URBANKE R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2001, IT47(2): 657-670.
- [9] RICHARDSON T J, SHOKROLLAHI A, URBANKE R L. Design of capacity approaching irregular low density parity check codes[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2001, IT47(2): 619-637.
- [10] CHUNG S Y. On the construction of some capacity approaching coding schemes[D]. U.K: Cambridge, 2000.

编辑 张俊