

## 基于二维指数条件分布的加速寿命模型

安宗文<sup>1,2</sup>, 黄洪钟<sup>1</sup>, 王贵宝<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学机电工程学院 成都 610054; 2. 兰州理工大学机电工程学院 兰州 730050)

**【摘要】**从概率意义上对寿命和应力之间的关系作了探索性研究。为了根据寿命和应力之间的概率相关性建立加速寿命模型, 假设在给定应力条件下元件寿命服从指数分布, 根据二维指数条件分布的定义和特性推导出一种BEC加速寿命模型。为了检验BEC模型的有效性, 利用一组加速寿命试验数据, 对BEC模型、Arrhenius模型、逆幂率模型进行了对比分析。结果表明, 在加速应力范围, BEC模型能够正确描述寿命与应力之间的关系, 与Arrhenius模型、IPL模型具有同等效力; 而在正常应力范围, BEC模型的寿命外推精度低于Arrhenius模型和IPL模型。

**关键词** 加速寿命; 二维指数条件分布; 模型建立; 相关方法

**中图分类号** TB114.3; O211.9 **文献标识码** A **doi**:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.03.033

## Accelerated Life Model Based on Bivariate Exponential Conditional Distributions

AN Zong-wen<sup>1,2</sup>, HUANG Hong-zhong<sup>1</sup>, and WANG Gui-bao<sup>1</sup>

(1. School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;

2. School of Mechatronics Engineering, Lanzhou University of Technology Lanzhou 730050)

**Abstract** To establish an accelerated life model based on the probabilistic correlation between lifetime and stress, an accelerated life model, named bivariate exponential conditional (BEC) accelerated life model, is derived according to the definition and properties of BEC distribution. Experimental data is employed to valid the BEC model. The results indicate that the BEC model can describe the relationship between the lifetime and stress properly in the accelerated stress domain compared with the Arrhenius and inverse power law (IPL) models, however, the life-extrapolation accuracy of the BEC model is a little lower than that of the Arrhenius and IPL models.

**Key words** accelerated life; bivariate exponential conditional distribution; model buildings; correlation methods

加速寿命试验是为了缩短试验时间, 在不改变故障模式和故障机理的条件下, 用加大应力的方法进行寿命试验。目前, 加速寿命试验已经广泛应用于航天产品和其他工业产品的寿命预测研究, 并取得许多应用成果<sup>[1-5]</sup>。

加速寿命试验的基本思想是利用高应力下的寿命特征去外推正常应力水平下的寿命特征。实现这一基本思想的关键在于建立寿命特征与应力水平之间的关系。这种寿命特征与应力水平之间的关系被称为加速模型。

加速模型分为物理加速模型和数学加速模型两大类。物理加速模型是通过与失效机理相关的物理原理推导而得的加速模型。物理加速模型的数学表

达形式为已知, 只是模型参数待定。这类加速模型主要有Arrhenius模型、逆幂律(inverse power law, IPL)模型、Eyring模型等。数学统计加速模型是通过寿命特征与应力类型的多项式回归建立的模型, 主要有广义对数线性模型、多项式加速模型、比例危险函数模型等<sup>[6]</sup>。这些模型分别从失效物理和数学回归的角度揭示产品寿命特征与应力水平之间的关系, 而且广泛应用于工程实践中。但究其本质, 这些模型都没有对寿命特征和应力水平之间的概率相关性给出清晰的说明。本文假设在给定应力条件下元件寿命服从指数分布, 并将寿命和应力视为服从二维指数条件(bivariate exponential conditional, BEC)分布的随机变量, 根据BEC分布的定义和特性, 从

收稿日期: 2008-10-28; 修回日期: 2009-03-10

基金项目: 国家自然科学基金(50775026); 国家863计划(2007AA04Z403); 四川省科技支撑计划(07GG012-002); 甘肃省教育厅科研基金(0603B-06)

作者简介: 安宗文(1968-), 男, 博士生, 副教授, 主要从事结构可靠性分析方面的研究。

寿命和应力之间概率相关性的角度, 推导一种加速寿命模型。为检验该模型的有效性, 将其与Arrhenius模型、IPL模型进行比较分析。

## 1 BEC分布及其性质

文献[7]最早提出BEC分布, 此后吸引了众多学者的关注, 目前已有许多利用BEC分布进行可靠性分析和评估的研究成果<sup>[8-10]</sup>。

### 1.1 BEC分布的定义

若二维随机变量 $(X, Y)$ 的联合概率密度为:

$$f(x, y) = K \exp[-(ax + by + cxy)] \quad (x > 0, y > 0) \quad (1)$$

式中  $a, b, c$  均为常数, 且  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;  $K$  为归一化常数, 其定义为:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{c} \exp\left(\frac{ab}{c}\right) \text{Ei}\left(\frac{ab}{c}\right)$$

式中  $\text{Ei}(x)$  表示指数积分函数, 则  $\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt$ 。 $(X, Y)$  服从参数为  $a, b, c$  的BEC分布。

根据概率论基本理论, 可得:

(1) 二维随机变量 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \frac{K \exp(-ax)}{b + cx} \quad (2)$$

$$f_Y(y) = \frac{K \exp(-by)}{a + cy} \quad (3)$$

(2) 随机变量 $X$ 和 $Y$ 的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|y) = (a + cy) \exp[-(a + cy)x] \quad (4)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = (b + cx) \exp[-(b + cx)y] \quad (5)$$

(3) 随机变量 $X$ 和 $Y$ 的相关系数为:

$$\rho_{XY} = \frac{abc + abK - K^2}{K(ab + c - K)} \quad (6)$$

### 1.2 BEC分布的性质

若二维随机变量 $(X, Y)$ 服从BEC分布, 则:

(1) 随机变量 $X, Y$ 的条件概率分别服从参数为 $(a + cy)$ 和 $(b + cx)$ 的标准指数分布;

(2) 随机变量 $X$ 和 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$ 为非正值, 且  $-0.32 < \rho_{XY} \leq 0$ <sup>[11]</sup>;

(3) 当且仅当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 随机变量 $X, Y$ 是相互独立的;

(4) 随机变量 $X, Y$ 具有负回归相关性<sup>[7]</sup>, 即对所有 $X$ 的可能取值 $x$ , 条件概率值 $P\{X > x|Y = y\}$ 随 $y$ 值的增大而减小; 对所有 $Y$ 的可能取值 $y$ , 条件概率值 $P\{Y > y|X = x\}$ 随 $x$ 值的增大而减小。

## 2 基于BEC分布的寿命加速模型

将加速寿命试验中被试元件的应力水平和寿命特征视为两个随机变量, 并分别用 $X$ 和 $Y$ 表示 $(X > 0, Y > 0)$ 。

假设元件在固定应力条件下的寿命 $(Y|X = x)$ 服从指数分布, 即满足BEC分布的性质(1)。

在加速寿命试验中, 被试元件的寿命 $Y$ 将随试验应力 $X$ 的增大而减小, 这一现象说明寿命随机变量 $Y$ 和应力随机变量 $X$ 之间并非相互独立, 而是具有某种潜在的相关性, 这种相关性可通过相关系数 $\rho_{XY}$ 定量描述。而且当任意给定一个寿命值 $y$ 时, 条件概率 $P\{Y > y|X = x\}$ 将随应力值 $x$ 的增大而减小, 寿命和应力之间的相关性属负回归相关性, 即满足BEC分布的性质(4)。因此, 服从BEC分布的二维随机变量 $(X, Y)$ 可以从概率相关性的角度描述加速寿命试验中被试元件应力和寿命之间的关系。

根据式(2), 在给定应力 $X = x$ 条件下, 服从指数分布的寿命随机变量 $Y$ 的条件数学期望为:

$$E\{Y|X = x\} = \frac{1}{b + cx} \quad (7)$$

式(7)描述了被试元件平均寿命与应力水平之间的关系, 其中 $x$ 为应力取值;  $b$ 和 $c$ 为BEC分布的参数。

为表述方便, 分别用 $S$ 和 $t$ 表示元件试验应力和对应的平均寿命, 可得基于BEC分布的加速寿命模型为:

$$t_{\text{BEC}} = \frac{1}{\alpha + \beta S} \quad (8)$$

因此式(8)简称为BEC模型, 其中 $\alpha, \beta$ 为待定系数。

## 3 三种加速模型比较分析

为了验证和分析BEC模型的有效性, 将其与Arrhenius模型、IPL模型进行对比分析。

Arrhenius模型和IPL模型可分别表达为:

$$t_{\text{Arr}} = A \exp\left(\frac{n}{S}\right) \quad (9)$$

$$t_{\text{IPL}} = AS^{-n} \quad (10)$$

式中  $A$ 和 $n$ 均为待定系数。

### 3.1 加速模型待定系数的确定

确定加速模型待定系数需要加速寿命试验获取有效的数据。文献[12]将航天航海器械中渐近污垢的临界时间定义为污垢增长过程寿命(简称污垢寿命), 选择管道内流体的硬度( $\text{Ca}^{2+}$ 的浓度)为试验应力进行了恒应力加速寿命试验, 试验结果如表1所示。与此同时, 该文献也对试验样本的寿命分布进行了统

计检验, 结果表明, 在给定应力条件下污垢样本寿命服从指数分布, 即满足BEC模型的基本假设。

表1 加速寿命试验数据

应力/mg·L <sup>-1</sup>	800	300	200	120	70
寿命/h	17.5	19.3	20.9	22.5	24.8

将式(8~9)和(10)分别进行恒等变形, 可得:

$$\frac{1}{t_{BEC}} = \alpha + \beta S \tag{11}$$

$$\ln t_{Arr} = \ln A + n \frac{1}{S} \tag{12}$$

$$\ln t_{IPL} = \ln A - n \ln S \tag{13}$$

式中  $\left(\frac{1}{t_{BEC}}, S\right)$ 、 $\left(\ln t_{Arr}, \frac{1}{S}\right)$  和  $(\ln t_{IPL}, \ln S)$  均成

线性关系。将表1数据进行相应处理, 利用线性最小二乘法可分别得到3种加速模型中的待定系数, 进而可得3种加速寿命模型, 具体表达式分别为:

$$t_{BEC} = \frac{1}{0.04275 + 0.00001979S} \tag{14}$$

$$t_{Arr} = 17.513 \exp\left(\frac{26.011}{S}\right) \tag{15}$$

$$t_{IPL} = 44.596S^{-0.1435} \tag{16}$$

### 3.2 分析与讨论

(1) 将3种加速模型用函数曲线表达并与试验结果进行比较, 如图1所示。在加速应力范围  $S \in (100, 800)$ , 3种加速寿命曲线与试验结果在总体趋势上具有良好的一致性。这表明在加速应力范围, 3种模型均能有效地描述污垢寿命与应力水平之间的关系。

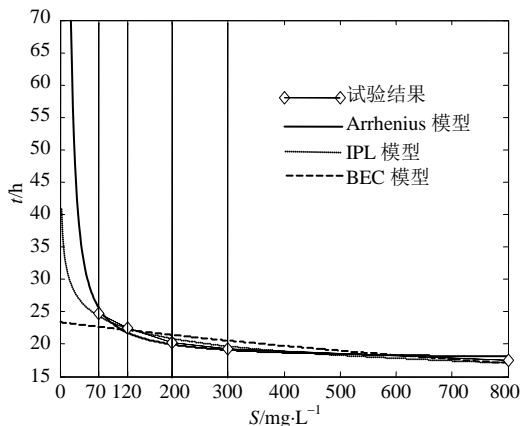


图1 加速寿命曲线与试验数据

(2) 由图1可见, 在正常应力范围  $(0 < S < 70)$ , 3种加速寿命曲线存在明显差别。如果用3种模型分别外推正常应力为20 mg/L时的污垢寿命, 结果如表

2所示。比较而言, BEC模型和IPL模型的外推结果比较接近, 但与Arrhenius模型的外推结果相差较大。由于缺乏应力为20 mg/L时污垢寿命的试验数据, 暂时无法比较3种模型在应力为20 mg/L时的寿命外推精度。

表2 应力为20 mg/L时的外推寿命

加速模型	BEC	Arrhenius	IPL
外推寿命/h	23.2	64.3	29.0

将70 mg/L当作正常应力(即为加速寿命试验中的加速应力), 利用3种模型外推应力为70 mg/L时的污垢寿命, 并与试验数据相比较, 结果如表3所示。可以看出, Arrhenius模型和IPL模型的寿命外推精度高于BEC模型。

表3 应力为70 mg/L时的外推寿命及其相对误差

加速模型	外推寿命/h	试验寿命/h	相对误差(%)
BEC	22.7		8.5
Arrhenius	25.4	24.8	2.4
IPL	24.2		2.4

(3) 当施加应力为零时, 被试元件理论上应该具有无限长寿命。然而, 由3种加速寿命模型的数学表达式可知: 当  $S \rightarrow 0$  时,  $t_{Arr} \rightarrow \infty$ ,  $t_{IPL} \rightarrow \infty$ , 而  $t_{BEC}$  为有界值。因此, 当正常应力越小(趋向于零应力), BEC模型的外推精度将越低。

(4) BEC模型的建立, 基于被试元件在给定应力条件下寿命服从指数分布的基本假设。这种假设虽然在大多数情况下可以被接受, 但如果被试元件寿命确实不服从指数分布, 则BEC模型将从最基本的数学基础上失去有效性。因此, 从理论上讲, BEC模型仅适用于给定应力条件下寿命服从指数分布的被试元件。

(5) BEC模型属数学加速模型, 但它又不同于其他数学加速模型。相对其他数学加速模型, BEC模型不是通过寿命特征与应力水平进行纯粹的数学回归建模, 而是利用BEC分布的特性, 用概率相关性的观点描述寿命和应力之间的内在联系, 具有完备的数学理论根基, 这是其主要特点。

(6) 由于所有数学加速模型都缺乏失效物理基础, 所以一般而言, 数学加速模型的寿命外推风险比物理加速模型大。

## 4 结论

本文对BEC加速寿命模型进行探索性研究。假设在固定应力作用下, 元件寿命服从指数分布。根据BEC分布的特性可推导出一种加速寿命模型。在

加速应力范围, BEC模型与Arrhenius模型、IPL模型具有同等的效力;而在正常应力范围,尤其是进行寿命外推时, BEC模型的外推精度相对较低。BEC模型的适用范围为给定应力条件下寿命服从指数分布的元件。

### 参 考 文 献

- [1] 王少萍, 焦宗夏, 郭 宏. 月球车驱动系统密封副加速寿命试验研究[J]. 中国机械工程, 2003, 14(1): 1-4.  
WANG Shao-ping, JIAO Zong-xia, GUO Hong. Study on accelerated life test of moon robot sealing material[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(1): 1-4.
- [2] 陈东生, 宋永刚, 许 强. 基于工程可靠性分析的陀螺电机加速寿命试验设计[J]. 导弹与航天运载技术, 2005, (6): 38-41.  
CHEN Dong-sheng, SONG Yong-gang, XU Qiang. Gyro-motor accelerated life test design based on engineering reliability analysis[J]. Missiles and Space Vehicles, 2005, (6): 38-41.
- [3] 张福泽, 叶序彬, 宋 钧, 等. 飞机日历寿命试验的介质成分确定和加速方法[J]. 航空学报, 2008, 29(4): 873-879.  
ZHANG Fu-ze, YE Xu-bin, SONG Jun, et al. Corrosion medium composition and accelerated corrosion method of aircraft calendar life test[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2008, 29(4): 873-879.
- [4] 刘志全, 李立新, 遇 今. 长寿命航天器机构的加速寿命试验方法[J]. 中国空间科学技术, 2008, 28(4): 65-71.  
LIU Zhi-quan, LI li-xin, YU Jin. Methods of accelerated life tests for long-life spacecraft mechanisms[J]. Chinese Space Science and Technology, 2008, 28(4): 65-71.
- [5] 汪亚顺, 张春华, 陈 循, 等. 存在工作历程产品的加速寿命试验统计分析[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(1): 94-97.  
WANG Ya-shun, ZHANG Chun-hua, CHEN Xun, et al. Statistical analysis of an accelerated life testing for products with operational period[J]. Journal of National University Defense Technology, 2008, 30(1): 94-97.
- [6] 李海波, 张正平, 胡彦平. 加速寿命试验方法及其在航天产品中的应用[J]. 强度与环境, 2007, 34(1): 2-10.  
LI Hai-bo, ZHANG Zheng-ping, HU Yan-ping. Accelerated life testing method and its applications for space products[J]. Structure and Environment Engineering, 2007, 34(1): 2-10.
- [7] ARNOLD B C, STRAUSS D. Bivariate distributions with exponential conditionals[J]. Journal of American Statistical Association, 1988, 83(402): 522-527.
- [8] SENGUPTA A. Random stress-dependent strength models through bivariate exponential conditionals distributions[M]// BALAKRISHNANN, SARABIAJM, CASTILLOE. Advances in distribution theory, order statistics, and inference. Boston: Birkhäuser, 2006: 327-339.
- [9] NAVARRO J, RUIZ J M, SANDOVA C J. Reliability properties of systems with exchangeable components and exponential conditional distributions[J]. Test, 2006, 15(2): 471-484.
- [10] GUPTA R C. Reliability studies of bivariate distributions with exponential conditionals[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008, 47: 1009-1018.
- [11] ARNOLD B C, CASTILLO E, SARABIA J M. Conditional specification of statistical models[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [12] 杨善让, 郭 锋, 孙灵芳, 等. 污垢热阻恒定应力加速寿命试验研究[J]. 工程热物理学报, 2004, 25(2): 326-328.  
YANG Shan-rang, GUO Feng, SUN Ling-fang, et al. Study on constant-stress accelerated life tests of fouling thermal resistance[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2004, 25(2): 326-328.

编辑 熊思亮

· 我校科研成果介绍 ·

## 95 GHz毫米波前端

- (1) 该技术采用W波段, 提高了火炮内弹道参数测试的系统分辨率。
- (2) 利用二次混频和发射机泄漏控制技术, 简化了系统, 提高了系统的信噪比。
- (3) 发射机采用了毫米波锁相技术, 提高了测试精度。
- (4) 采取天线加固、电源多次稳压等技术措施, 保证了系统在野外火炮发射恶劣环境下的工作稳定可靠。
- (5) 采用了激光束和角反射器相结合的辅助对准手段, 使系统现场调试更为方便。