

具有区间参数的瞬态温度场数值分析

李金平¹, 陈建军¹, 刘国梁¹, 李军锁²

(1. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071; 2. 中国空间技术研究院卫星应用系统部 西安 710065)

【摘要】针对不确定结构的瞬态热传导问题, 提出一种将结构的各个物理参数和温度的初、边值条件均视为区间变量, 并利用区间分析进行处理的方法。对具有区间参数的热传导抛物型方程的求解, 在空间域上利用有限单元离散, 在时间域上利用差分离散, 将区间分析和常规的有限元法相结合, 建立了基于单元的区间有限元方法。利用矩阵摄动公式求解结构的区间有限元方程, 获得了结构瞬态温度场响应的范围。通过一瞬态热传导问题的算例表明该方法的可行性和有效性。

关键词 区间分析; 区间参数; 矩阵摄动; 温度场; 不确定性

中图分类号 O551.3

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.03.035

Numerical Analysis of Transient Temperature Field with Interval Parameters

LI Jin-ping¹, CHEN Jian-jun¹, LIU Guo-liang¹, and LI Jun-suo²

(1. School of Electromechanical Engineering, Xidian University Xi'an 710071;

2. Space Star of China Academy of Space Technology Xi'an 710065)

Abstract A method using interval analysis is presented for transient heat conduction problems of uncertain structure. In this method, each parameter and initial boundary conditions are regarded as interval parameters. In order to solve parabolic equation of heat conduction with interval parameters, the regions of space are discretized by finite elements and the regions of time are discretized by finite difference. The interval finite element method based on the element is established via the combination of interval analysis and the traditional finite element method. The interval finite equation of structure is solved by matrix perturbation formulas, and then the range of temperature field response of the structure is obtained. The proposed method is finally applied to the problem of transient heat conduction which shows its effectiveness.

Key words interval analysis; interval parameters; matrix perturbation; temperature field; uncertainty

对于工程中大多数结构存在的不确定性(结构参数存在误差或不确定性), 若不将它们量化或模型化加以考虑, 就不能作出合理的分析和设计。虽然概率统计分析方法在描述结构中的不确定现象方面获得了成功, 但当结构的不确定性不具有统计特性, 或缺乏足够的信息描述不确定参量的概率特性时, 概率模型的应用反而会引入较大的误差。目前对不确定问题的描述模型主要有随机模型、模糊模型^[1]和区间模型³种。区间模型适用于统计信息贫乏, 不足以描述不确定参数的概率分布或隶属函数; 以及仅知道不确定参数的取值区间范围, 并仅想获得结构响应的区间范围的情况。因此, 利用区间理论和方法研究工程中的不确定性因素比较常用。目前, 对不确定结构的静、动力特性^[2-7]和可靠性^[8-9]方面, 利用区间理论进行分析已经获得了许多

成果, 然而对具有区间参数的瞬态温度场分析的文献却十分少见。因此, 对具有区间参数温度场问题的研究, 并确定温度响应所在的范围或界限具有重要的理论和工程意义。

在常规的热传导分析中, 导热系数、换热系数以及换热介质温度等热参数均被作为确定性量来处理。近年来, 一些研究者将导热中的有关参数当作服从某种分布模型的随机变量, 利用随机有限元方法求出节点温度响应^[10]。然而, 由于实际问题中往往缺乏足够的实验数据来真实地确定随机变量的概率密度函数, 使得利用概率方法处理工程中的不确定性问题有时不能得到可靠的结果。鉴于此, 本文提出将导热中的各不确定性参数均视为区间数进行分析的方法, 利用有限元法获得了以诸区间参数表出的单元温度刚度矩阵、热容矩阵及荷载向量, 将

收稿日期: 2007-12-29; 修回日期: 2008-06-11

基金项目: 国家863计划(2006AA04Z402); 部级预研基金

作者简介: 李金平(1981-), 男, 博士生, 主要从事随机与智能结构方面的研究。

它们在各区间参数中值处以一阶泰勒级数展开；并利用函数的区间扩展进行近似处理，经有限元组集获得结构整体的温度刚度矩阵、热容矩阵以及等效荷载列向量，形成区间有限元方程，最后利用矩阵摄动方法求解。

1 热传导控制方程及初边值条件

由传热学，对均匀、各向同性材料的瞬态传热问题的控制方程为：

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_0 = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

式中 T 为温度场分布； k 为材料的导热系数； q_0 为热源强度； ρ 为材料的密度； c 为材料的比热； t 为时间。

传热问题常见的3类边界条件为：

(1) 第一类边界，已知物体边界 Γ 上的温度分布，即有：

$$T|_{\Gamma} = T_w \quad (2)$$

(2) 第二类边界，已知物体边界 Γ 上的热流密度 q ，其符号的确定为：凡是热量从物体向外流出者取正号，而流入者取负号，即有：

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q \quad (3)$$

(3) 第三类边界，已知边界 Γ 上与物体相接触的流体介质的温度 T_f 和换热系数 h ，即有：

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = h(T - T_f) \Big|_{\Gamma} \quad (4)$$

传热问题的初值条件为：已知 $t=0$ 开始时刻物体整个区域上的温度或温度场分布，即 $T|_{t=0} = T_0$ 。

本文考虑瞬态传热问题式(1)~式(4)中结构参数具有不确定性的最一般情况，即将其中的导热系数 k 、材料密度 ρ 、材料比热 c 、换热系数 h 等物理参数，以及环境温度 T_f 的幅值、热源强度 q_0 的幅值和初始温度 $T|_{t=0}$ 的幅值等均视为区间变量。从而以上问题成为具有区间参数和给定区间初、边值条件的抛物型偏微分方程。显然，对该类问题只能利用基于区间的数值方法求解。

2 区间有限元法

将上述所有不确定性的结构区间参数记为广义区间向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ ，其相应的中值为 $\boldsymbol{\alpha}^c = (\alpha_i^c)^T = (\alpha_1^c, \alpha_2^c, \dots, \alpha_m^c)^T$ ，其离差为 $\Delta \boldsymbol{\alpha} = (\Delta \alpha_i)^T = (\Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \dots, \Delta \alpha_m)^T$ 。区间向量 $\boldsymbol{\alpha}^1$ 可用其分解形式表示为：

$$\boldsymbol{\alpha}^1 = \boldsymbol{\alpha}^c + [-\Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta \boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\alpha}^c + \Delta \boldsymbol{\alpha}^1 = \boldsymbol{\alpha}^c + \Delta \boldsymbol{\alpha} e_{\Delta} \quad (5)$$

式中 $\Delta \boldsymbol{\alpha}^1 = [-\Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta \boldsymbol{\alpha}]$ ； $e_{\Delta} = [-1, 1]$ 。

对含有区间参数的瞬态热传导问题式(1)~式(4)，利用有限元法可得结构各单元的温度刚度矩阵。此时第 j 个单元的温度刚度矩阵 \mathbf{K}_j 中一般含有若干个区间参数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，其中， n 为单元温度刚度矩阵中区间参数的个数。为此，单元温度刚度矩阵为含有区间参数的区间矩阵。对此区间矩阵，利用泰勒级数展开和区间数学中的自然区间扩张，忽略二阶以上小项，可将结构的第 j 个单元的温度刚度矩阵表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j(\alpha_i^1) &= \mathbf{K}_j(\alpha_i^c) + \frac{\partial \mathbf{K}_j(\alpha_i^c)}{\partial \alpha_1} (\alpha_1^1 - \alpha_1^c) + \\ &\frac{\partial \mathbf{K}_j(\alpha_i^c)}{\partial \alpha_2} (\alpha_2^1 - \alpha_2^c) + \dots + \frac{\partial \mathbf{K}_j(\alpha_i^c)}{\partial \alpha_n} (\alpha_n^1 - \alpha_n^c) = \\ &\mathbf{K}_j(\alpha_i^c) + \frac{\partial \mathbf{K}_j(\alpha_i^c)}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 e_{j1} + \dots + \frac{\partial \mathbf{K}_j(\alpha_i^c)}{\partial \alpha_n} \Delta \alpha_n e_{jn} = \\ &\mathbf{K}_j(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \end{aligned} \quad (6)$$

同理，热容矩阵 $\mathbf{M}_j(\alpha_i^1)$ 和相应的右端等效荷载向量 $\mathbf{R}_j(\alpha_i^1)$ 亦可以式(6)的形式表示为：

$$\mathbf{M}_j(\alpha_i^1) = \mathbf{M}_j(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_j(\alpha_i^1) = \mathbf{R}_j(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (8)$$

按照有限元“对号入座”的法则和函数的区间扩张，结构的总温度刚度矩阵、总热容矩阵和右端总等效荷载向量可以组合为：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}^1) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_j(\boldsymbol{\alpha}^1) = \sum_{j=1}^N \left[\mathbf{K}_j(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \right] = \\ &\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}^1) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (10)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^1) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^c) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (11)$$

式中 N 为结构中的单元数目。

令

$$\Delta \mathbf{K}^1 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{M}^1 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{R}^1 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \quad (14)$$

即有:

$$\mathbf{K}(\alpha^1) = \mathbf{K}(\alpha^c) + \Delta \mathbf{K}^1 \quad (15)$$

$$\mathbf{M}(\alpha^1) = \mathbf{M}(\alpha^c) + \Delta \mathbf{M}^1 \quad (16)$$

$$\mathbf{R}(\alpha^1) = \mathbf{R}(\alpha^c) + \Delta \mathbf{R}^1 \quad (17)$$

从而结构瞬态热传导问题的区间有限元控制方程为:

$$\mathbf{M}(\alpha^1) \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_t + \mathbf{K}(\alpha^1) \mathbf{T}_t = \mathbf{R}(\alpha^1) \quad (18)$$

式中 下标 t 表示在该时刻的取值。

利用两点向后差分代替式(18)中的微分, 即有:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_t = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{T}_t - \mathbf{T}_{t-\Delta t}) \quad (19)$$

式中 Δt 为时间步长。

将相关项代入式(18), 经整理有:

$$\left(\mathbf{K}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} + \Delta \mathbf{K}^1 + \frac{\Delta \mathbf{M}^1}{\Delta t} \right) \mathbf{T}_t = \mathbf{R}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c + \Delta \mathbf{R}^1 + \frac{\Delta \mathbf{M}^1}{\Delta t} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \Delta \mathbf{T}_{t-\Delta t}^1 \quad (20)$$

式中 $\mathbf{T}_{t-\Delta t}^c$ 为 $t - \Delta t$ 时刻节点温度的确定量; $\Delta \mathbf{T}_{t-\Delta t}^1$ 为 $t - \Delta t$ 时刻节点温度的不确定量。

3 矩阵摄动求解公式

假设在任意 t 瞬时结构的节点温度向量、总温度刚度矩阵和总荷载向量分别为 \mathbf{T} 、 \mathbf{K} 和 \mathbf{R} , 则在该瞬时结构的平衡方程为:

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (21)$$

在式(20)中, 令:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c \quad (23)$$

$$\delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{K}^1 + \frac{\Delta \mathbf{M}^1}{\Delta t} \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{R} = \Delta \mathbf{R}^1 + \frac{\Delta \mathbf{M}^1}{\Delta t} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \Delta \mathbf{T}_{t-\Delta t}^1 \quad (25)$$

若将 $\delta \mathbf{K}$ 和 $\delta \mathbf{R}$ 视为矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{R} 在 \mathbf{K}_0 和 \mathbf{R}_0 处的摄动量, 则可求出结构在 t 时刻节点温度的确定量 \mathbf{T}_t^c 和区间不确定量 $\Delta \mathbf{T}_t^1$ 分别为:

$$\mathbf{T}_t^c = \left(\mathbf{K}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \right)^{-1} \left(\mathbf{R}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c \right) \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{T}_t^1 = -\mathbf{K}_0^{-1} (\delta \mathbf{K} \mathbf{T}_0 - \delta \mathbf{R}) =$$

$$\begin{aligned} & - \left(\mathbf{K}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \right)^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \right) \mathbf{T}_t^c - \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i e_{ji} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \Delta \mathbf{T}_{t-\Delta t}^1 \right) \right] \equiv \\ & \left[- \left(\mathbf{K}(\alpha^c) + \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_j}{\partial \alpha_i} \mathbf{T}_t^c + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}_j}{\partial \alpha_i} \mathbf{T}_t^c - \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}_j}{\partial \alpha_i} \mathbf{T}_{t-\Delta t}^c \right) \Delta \alpha_i - \right. \\ & \left. \left. \frac{\mathbf{M}(\alpha^c)}{\Delta t} \Delta \mathbf{T}_{t-\Delta t}^1 \right] \right] \mathbf{e}_\Delta = \Delta \mathbf{T}_t^1 [-1, 1] \quad (27) \end{aligned}$$

式中 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_j}{\partial \alpha_i}$ 、 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}_j}{\partial \alpha_i}$ 和 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_j}{\partial \alpha_i}$ 分别为扩充之后与整体刚度矩阵、整体热容阵及载荷列向量同维数的矩阵或列向量; $|*|$ 表示对 $*$ 取绝对值; $\Delta \mathbf{T}_t$ 为 t 时刻节点温度的离差。具有区间参数和区间初、边值条件的结构在 t 时刻的节点温度场的上、下界分别为:

$$\bar{\mathbf{T}}_t = \mathbf{T}_t^c + \Delta \mathbf{T}_t \quad (28)$$

$$\underline{\mathbf{T}}_t = \mathbf{T}_t^c - \Delta \mathbf{T}_t \quad (29)$$

4 算 例

长20 mm、宽10 mm的平面长方柱体的所有物理参数和初、边值条件均具有区间不确定性, 即导热系数 $k^1 = [15.5, 16.5] \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$, 结构的密度 $\rho^1 = [4\ 995, 5\ 005] \text{ kg}/\text{m}^3$, 比热 $c^1 = [199, 201] \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$; 然后放入介质温度 $T_f^1 = [99, 101] ^\circ\text{C}$ 中加热, 左右边界面的换热系数 $h^1 = [1\ 598, 1\ 602] \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, 上下边界为绝热面, 求结构加热过程中各时刻的温度场。

由于结构和热荷载的对称性, 本文仅取结构的右半部分进行计算, 并将其划分为8个三角形单元, 如图1所示。取时间步长为0.001 s, 按前述的方法编程进行了计算。表1给出了1、5、9号节点温度响应在不同时间的上、下界和中值结果, 以及中值与文献[11]对该例确定性问题计算结果的比较。计算结果表明, 具有区间参数的瞬态温度场响应的中值与确定性结构温度场随时间的变化规律是完全一致的。由于确定性问题仅是区间问题中所有区间参数取值区间宽度为零的一种特例, 即从特殊的角度印证了本文方法的计算结果的正确性。

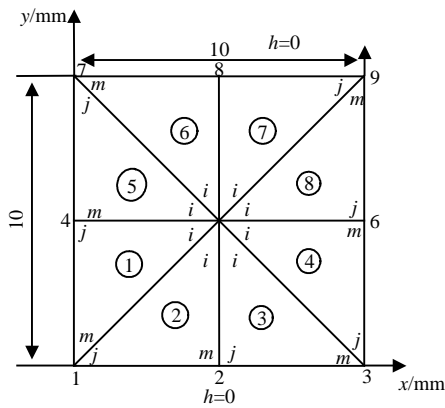


图1 有限元离散图

表1 节点温度在不同时刻的上、下界和中值

		1s	2s	3s
节点1	下界	20.361	27.845	35.724
	中值	20.597	28.262	36.243
	(文献11)	(21.298)	(28.269)	(36.011)
	上界	20.833	28.679	36.762
节点5	下界	25.837	34.288	41.604
	中值	26.090	34.635	42.044
	(文献11)	(25.899)	(34.419)	(41.791)
	上界	26.343	34.982	42.484
节点9	下界	45.395	52.777	58.124
	中值	45.472	52.911	58.360
	(文献11)	(44.528)	(52.574)	(58.145)
	上界	45.550	53.046	58.596

5 结论

(1) 本文将结构瞬态传热问题中的各参数及初、边值条件均视为区间变量，利用区间分析和有限元法建立了基于单元的区间有限元方法；并利用矩阵摄动公式对结构的区间有限元方程进行了求解，给出了节点温度响应的上下界。算例表明，该方法对求解具有区间不确定性参数结构的热传导问题是可行和有效的。

(2) 从算例结果可知，具有区间参数的瞬态温度场响应的中值与确定性结构温度场随时间的变化规律是完全一致的。此外，在每一瞬时各节点温度响应的变化范围是不相同的，但差异不大。

参考文献

[1] SHU Lan, ZHAO Lei. Representation theorem of fuzzy rough set[J]. Journal of Electronic Science and Technology

of China, 2004, 2(4): 76-78.
 [2] MUHANNA R L, ZHANG Hao, Mullen R L. Interval finite elements as a basis for generalized models of uncertainty in engineering mechanics[J]. Reliable Computing, 2007, 13(2): 173-194.
 [3] ADDURI P R, PENMETSA R C. Bounds on structural system reliability in the presence of interval variables[J]. Computers and Structures, 2007, 85(5-6): 320-329.
 [4] MOENS P, VANDEPITTE D. Non-probabilistic approaches for non-deterministic dynamic FE analysis of imprecisely defined structures[C]//Proceedings of the 2004 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA. Leuven, Belgium: Katholieke University Leuven, 2004: 3095-3119.
 [5] DE GERSEM H, MOENS D. Interval and fuzzy finite element analysis of mechanical structures with uncertain parameters[C]//Proceedings of the 2004 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA. Leuven, Belgium: Katholieke University Leuven, 2004: 3009-3021.
 [6] 杨晓伟, 陈塑寰, 滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2): 179-183.
 YANG Xiao-wei, CHEN Su-huan, TENG Shao-yong. Static interval finite element method based on the elements[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 179-183.
 [7] 邱志平, 马丽红, 王晓军. 不确定非线性结构动力响应的区间分析方法[J]. 力学学报, 2006, 38(5): 645-651.
 QIU Zhi-ping, MA Li-hong, WANG Xiao-jun. Interval analysis for dynamic response of nonlinear structures with uncertainties[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(5): 645-651.
 [8] XUE HX, TANG WY, ZHANG S K, et al. Interval analysis method of fatigue and fracture reliability for offshore structures based on probabilistic and non-probabilistic hybrid model[C]//Proceedings of The Sixteenth 2006 International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE. San Francisco, CA, USA: International Society of Offshore and Polar Engineers, 2006.
 [9] 郭书祥, 张陵, 李颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227-231.
 GUO Shu-xiang, ZHANG Ling, LI Ying. Procedures for computing the non-probabilistic index of uncertain structures[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(2): 227-231.
 [10] EMERY A F. Solving stochastic heat transfer problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(3): 279-291.
 [11] 林金木. 瞬态温度场的新解法[J]. 湖南大学学报, 1996, 23(1): 78-84.
 LIN Jin-mu. A new method for determining transient temperature field[J]. Journal of Hunan University, 1996, 23(1): 78-84.

编辑 黄莘