

轮轨集总参数简化模型稳定性与分岔研究

高学军^{1,2}, 李映辉¹, 高庆¹

(1. 西南交通大学力学与工程学院 成都 610031; 2. 安徽建筑工业学院土木工程学院 合肥 230022)

【摘要】基于轮轨集总参数简化模型,采用Hertz非线性接触理论模拟轮轨接触力,导出轮轨耦合非线性动力学模型的状态方程。利用自适应变步长Runge-Kutta法求解状态方程,可得到轮轨系统各部件位移、速度、加速度等随车辆运行速度的变化规律及车辆失稳的临界速度。数值结果表明,该方法不仅可以得出系统的失稳临界速度,而且可以观察到各部件的振动情况和失稳形态。

关键词 分岔; 模型; 非线性; 稳定性; 轮轨系统

中图分类号 O317

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.03.036

Stability and Bifurcation Analysis of the Simplified Parameter-Lumped Model in Wheel-Rail System

GAO Xue-jun^{1,2}, LI Ying-hui¹, and GAO Qing¹

(1. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University Chengdu 610031;

2. School of Civil Engineering, Anhui Institute of Architecture & Industry Hefei 230022)

Abstract Based on the simplified parameter-lumped dynamical model which dominates the vertical vibration of wheel-rail system, the state equations of the wheel-rail coupling nonlinear dynamic model are derived, in which the Hertz nonlinear contact force is adopted to simulate the wheel-rail interactions. The self-adapted Runge-Kutta method is used to solve the state equations. The change rule of the overall displacements, velocities and accelerations of all parts changed with the vehicle speed is investigated and the critical speed which describes the dynamic stability of vehicle system is obtained. The numerical results show that the method can not only obtain the critical speed, but also may have the overview of the vibration and instability of all parts.

Key words bifurcation; model; nonlinearity; stability; wheel-rail system

高速铁路运输是交通运输中一个很重要的组成部分,如何提高机车车辆的运动稳定性、运行平稳性、曲线通过性能等指标,是研制高速机车车辆的关键,其中列车系统的稳定性直接影响列车允许的最高运行速度^[1]。高速列车需要具有更高的失稳临界速度,列车系统失稳将会影响到其运行平稳性和旅客的乘坐舒适性,甚至会引起脱轨安全事故。近年来,国内外开展了一些对于车辆非线性系统的稳定性和分叉的研究^[2-4],并涉及到了混沌运动^[5-6]。文献[7]研究发现在一定参数下,轮子也会发生共振、鞍结分岔或倍化分岔,甚至进入混沌运动状态。文献[8]介绍了滞后非线性系统的发展状况,对影响车辆稳定性的各种因素进行了总结。为了分析机车车辆通过轨道时轨道的振动特性,研究人员建立了许多模型,其共同特点是不管车辆模型如何复杂,都将轨道结构简化成一个刚体或具有刚度和阻尼的支承面,同时把轨道上的不平顺作为激励输入该系统,

以此来确定车辆的动态性能,选择振动参数及评价运动性能等。日本学者Sato提出了用于车辆和轨道结构振动分析的半车模型,轨道采用集总参数简化模型,可以分析车辆和轨道结构的振动和受力。在参数激励振动分岔、稳定性方面的分析则少见报道。

由于上述模型自由度较少,充分考虑了轮轨耦合非线性特点,本文基于集总参数简化模型的振动微分方程,导出轮轨耦合非线性,包含18个微分方程的状态方程。为了方便求解,引入适当的假设后,采用自适应步长的Runge-Kutta求解不同速度下各部件响应,不仅可以得到模型的失稳临界速度,而且可以了解各部件的振动情况和失稳形态,以此来分析车辆系统稳定性、分岔方面的一些问题。

1 模型的振动控制方程

轮轨系统动力学简化模型如图1所示,该模型可用于简化分析轨道不平顺对轮轨系统的受力和振动

收稿日期: 2007-10-25; 修回日期: 2008-04-11

基金项目: 教育部长江学者和创新团队发展计划(IRT0452)

作者简介: 高学军(1979-),男,博士生,主要从事非线性动力学方面的研究。

的影响。

整个系统共有9个自由度,包括半车体、转向架、轮对、钢轨、轨枕的垂向位移以及转向架点头角位移,依次用符号 y_c 、 y_b 、 y_{w1} 、 y_{r1} 、 y_{s1} ($i=1,2$)和 ϕ_b 表示,则9个动力学方程^[9]为:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & m_c \frac{d^2 y_c}{dt^2} + k_c (y_c - y_b) + c_c \left(\frac{dy_c}{dt} - \frac{dy_b}{dt} \right) = 0 \\
 & J_b \frac{d^2 \phi_b}{dt^2} + c_w l_b \left(l_b \frac{d\phi_b}{dt} - \frac{dy_{w1}}{dt} \right) + c_w l_b \times \\
 & \left(l_b \frac{d\phi_b}{dt} + \frac{dy_{w2}}{dt} \right) + k_w l_b (l_b \phi_b - y_{w1}) + \\
 & k_w l_b (l_b \phi_b + y_{w2}) = 0 \\
 & m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} + c_w \left(\frac{dy_b}{dt} + l_b \frac{d\phi_b}{dt} - \frac{dy_{w1}}{dt} \right) + \\
 & c_w \left(\frac{dy_b}{dt} - l_b \frac{d\phi_b}{dt} - \frac{dy_{w2}}{dt} \right) + k_w (y_b + \\
 & l_b \phi_b - y_{w1}) + k_w (y_b - l_b \phi_b - y_{w2}) + \\
 & k_c (y_b - y_c) = 0 \\
 & m_w \frac{d^2 y_{w1}}{dt^2} + c_w \left(\frac{dy_{w1}}{dt} - \frac{dy_b}{dt} - l_b \frac{d\phi_b}{dt} \right) + \\
 & k_w (y_{w1} - y_b - l_b \phi_b) + P_{c1} = 0 \\
 & m_w \frac{d^2 y_{w2}}{dt^2} + c_w \left(\frac{dy_{w2}}{dt} - \frac{dy_b}{dt} + l_b \frac{d\phi_b}{dt} \right) + \\
 & k_w (y_{w2} - y_b + l_b \phi_b) + P_{c2} = 0 \\
 & m_r \frac{d^2 y_{r1}}{dt^2} + c_p \left(\frac{dy_{r1}}{dt} - \frac{dy_{s1}}{dt} \right) + \\
 & k_p (y_{r1} - y_{s1}) - P_{c1} = 0 \\
 & m_r \frac{d^2 y_{r2}}{dt^2} + c_p \left(\frac{dy_{r2}}{dt} - \frac{dy_{s2}}{dt} \right) + \\
 & k_p (y_{r2} - y_{s2}) - P_{c2} = 0 \\
 & m_s \frac{d^2 y_{s1}}{dt^2} + c_p \left(\frac{dy_{s1}}{dt} - \frac{dy_{r1}}{dt} \right) + k_p (y_{s1} - \\
 & y_{r1}) + c_b \frac{dy_{s1}}{dt} + k_b y_{s1} = 0 \\
 & m_s \frac{d^2 y_{s2}}{dt^2} + c_p \left(\frac{dy_{s2}}{dt} - \frac{dy_{r2}}{dt} \right) + k_p (y_{s2} - \\
 & y_{r2}) + c_b \frac{dy_{s2}}{dt} + k_b y_{s2} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

式中 m_c 、 m_b 、 m_w 分别为半车体、转向架和轮对质量; J_b 为转向架的点头惯量; m_r 、 m_s 为钢轨和轨下基础的集中质量; k_c 、 c_c 、 k_w 、 c_w 、 k_p 、 c_p 分别为二系悬挂、一系悬挂和轨下垫层的刚度和阻尼; k_b 、 c_b 为轨枕、道床和路基的集中刚度和阻尼; l_b 为转向架轴距的一半; P_{c1} 、 P_{c2} 为轮对与钢轨的垂向作用力。

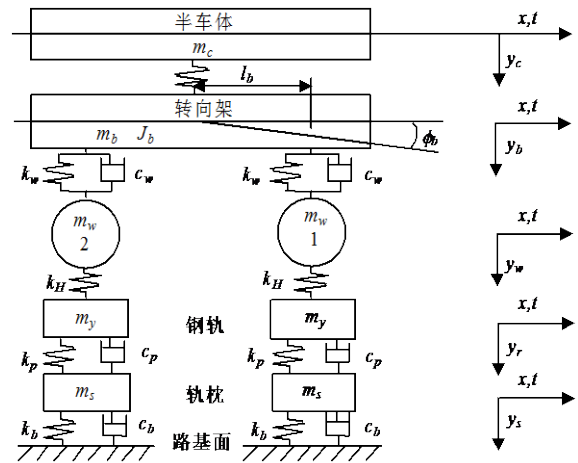


图1 集总参数简化模型

将动力学方程(1)转化为状态方程, 可得:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x, V, t) \quad (2)$$

式中 $x = \left(\frac{dy_c}{dt}, \frac{d\phi_b}{dt}, \frac{dy_b}{dt}, \frac{dy_{w1}}{dt}, \frac{dy_{w2}}{dt}, \frac{dy_{r1}}{dt}, \frac{dy_{r2}}{dt}, \frac{dy_{s1}}{dt}, \frac{dy_{s2}}{dt}, y_c, \phi_b, y_b, y_{w1}, y_{w2}, y_{r1}, y_{r2}, y_{s1}, y_{s2} \right)^T$; $F(x, V, t)$ 为 18×1 的列向量; 矩阵 $A = \begin{bmatrix} B & C \\ I & 0 \end{bmatrix}$, I 和 0 为 9×9 的单位矩阵和零矩阵, B 和 C 均为 9×9 的分块矩阵, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$, 其中, B_{11} 、 C_{11} 为 5×5 常量矩阵, B_{22} 、 C_{22} 为 4×4 常量矩阵, 则有:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2c_w l_b^2}{J_b} & 0 & \frac{c_w l_b}{J_b} & -\frac{c_w l_b}{J_b} \\ 0 & 0 & -\frac{2c_w}{m_b} & \frac{c_w}{m_b} & \frac{c_w}{m_b} \\ 0 & \frac{c_w l_b}{m_w} & \frac{c_w}{m_w} & \frac{c_w}{m_w} & 0 \\ 0 & -\frac{c_w l_b}{m_w} & \frac{c_w}{m_w} & 0 & -\frac{c_w}{m_w} \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{c_p}{m_r} & 0 & \frac{c_p}{m_r} & 0 \\ 0 & -\frac{c_p}{m_r} & 0 & \frac{c_p}{m_r} \\ \frac{c_p}{m_s} & 0 & -\frac{c_p - c_b}{m_s} & 0 \\ 0 & \frac{c_p}{m_s} & 0 & -\frac{c_p - c_b}{m_s} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{k_c}{m_c} & 0 & \frac{k_c}{m_c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2k_w l_b^2}{J_b} & 0 & \frac{k_w l_b}{J_b} & -\frac{k_w l_b}{J_b} \\ \frac{k_c}{m_b} & 0 & -\frac{2k_w - k_c}{m_b} & \frac{k_w}{m_b} & \frac{k_w}{m_b} \\ 0 & \frac{k_w l_b}{m_w} & \frac{k_w}{m_w} & -\frac{k_w}{m_w} & 0 \\ 0 & -\frac{k_w l_b}{m_w} & \frac{k_w}{m_w} & 0 & -\frac{k_w}{m_w} \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{k_p}{m_r} & 0 & \frac{k_p}{m_r} & 0 \\ 0 & -\frac{k_p}{m_r} & 0 & \frac{k_p}{m_r} \\ \frac{k_p}{m_s} & 0 & -\frac{k_p - k_b}{m_s} & 0 \\ 0 & \frac{k_p}{m_s} & 0 & -\frac{k_p - k_b}{m_s} \end{bmatrix}$$

$$F(x, V, t) = (0, 0, 0, -\frac{P_{c1}}{m_w}, -\frac{P_{c2}}{m_w}, \frac{P_{c1}}{m_w}, \frac{P_{c2}}{m_w}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (3)$$

由式(2)可知, 方程的平衡解 $x(V)$ 与车辆运行速度 V 有关。随着速度 V 的增大, 其解的拓扑结构将发生改变, 系统可能出现分岔, 此时其解的稳定性将从稳定变为不稳定。这种现象称为“失稳”, 其速度为临界速度。

2 轮轨力的计算

利用式(3)计算轮轨力 P_{c1} 和 P_{c2} , 如果用线性赫兹接触力 $P_{ci} = k_H(y_{wi} - y_{ri})$, 则计算误差太大, 使计算结果失去实际应用价值, 应用赫兹非线性接触力代入微分方程计算。由赫兹非线性接触理论可得^[10]:

$$P_c = \left[\frac{1}{G} \delta y(t) \right]^{3/2} \quad (4)$$

式中 $\delta y(t)$ 为轮轨之间的弹性压缩量; G 为轮轨接触常数, 与车轮半径 R 、车轮和钢轨材料的弹性模量及泊松比有关, 当车轮为锥形踏面时, $G = 4.57R^{-0.149} \times 10^{-8}$; 当车轮为磨耗形踏面时, $G = 3.86R^{-0.115} \times 10^{-8}$ 。

轮轨间的弹性压缩量包括车轮静压量, 可由轮轨接触点处车轮和钢轨的位移直接确定, 即:

$$\delta y(t) = y_{wi}(t) - y_r(x_{pi}, t) \quad (5)$$

式中 $y_{wi}(t)$ 为 t 时刻第 i 位车轮的位移; $y_r(x_{pi}, t)$

为 t 时刻第 i 位车轮下钢轨的位移。

当轮轨界面存在位移不平顺 $y_0(t)$ 输入时, 轮轨力为:

$$P_{ci}(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{G} [y_{wi}(t) - y_r(x_{pi}, t) - y_0(t)] \right\}^{3/2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{轮轨脱离时}$$

取轨面不平顺为谐波型不平顺, 有:

$$y_0 = \frac{1}{2} a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (6)$$

式中 a 为不平顺深度; l 为不平顺长度; l_1 为初始时刻1轮对距不平顺的距离, 如图2所示。

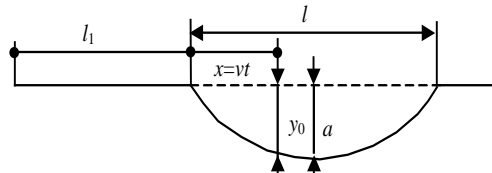


图2 谐波型不平顺形式

本文考虑轮对主要受轨道不平顺的影响, 忽略其他次要因素; 并认为车辆在运行过程中轮对与钢轨始终处于接触状态, 其中轨面不平顺为连续的谐波型不平顺。一个转向架的两个轮子在轨面不平顺区域上的位置不一样, 因此受到的轮轨力也不一样。根据转向架的固定轴距, 可得第一轮对和第二轮对:

$$\begin{cases} y_{01} = \frac{1}{2} a \left(1 - \cos 2\pi \frac{vt - l_1}{l} \right) \\ y_{02} = \frac{1}{2} a \left(1 - \cos 2\pi \frac{vt - l_1 - 2l_b}{l} \right) \end{cases} \quad (7)$$

3 数值模拟

车辆与轨道的计算参数取自文献[10], 轨面不平顺长度 $l=350$ mm, 轨面不平顺深度 $a=0.7$ mm, 起始时刻1轮对距离不平顺的距离 $l_1=0.0$ m, 车辆运行速度范围 $V=50 \sim 350$ m/s。利用自适应变步长的 Rung-Kutta法可求解式(2)耦合的非线性状态方程组, 进而可得到各部件的位移、速度和加速度, 数值计算结果如图3~图4所示。

图3给出了车辆运行速度与各部件位移关系曲线。横坐标表示车辆运行速度, 纵坐标表示各刚体的振动位移, 为了显示清晰, 横纵坐标采取不同的范围。从总体上看, 系统各部件在速度较低时作周期运动, 处于平稳运行状态; 随着速度的逐渐增大, 系统出现分岔并开始失稳, 甚至进入混沌状态。从数量级上看, 轮对的振动位移最大, 钢轨以下部分的振动位移相对小很多, 轮对的振动位移比钢轨以

下部分振动位移大两个数量级左右。

图3a和图3b所示为1,2轮对位移图,两轮在失稳前振动位移不大,车辆运行速度超过临界速度后,则发生剧烈的振动,振幅大幅增加。图3c和图3d所示为1,2钢轨位移图,随着车辆运行速度缓慢增加,两钢轨振动趋于平稳,失稳后,两钢轨的振动位移也会急剧增大,出现多个1周期-多周期-1周期振动形式。图3e和图3f所示为1,2轨枕的位移图,两轨枕在车速较低时以相近的振动方式一直振动,同样,失稳后振动也会出现多个1周期-多周期-1周期振动形式。

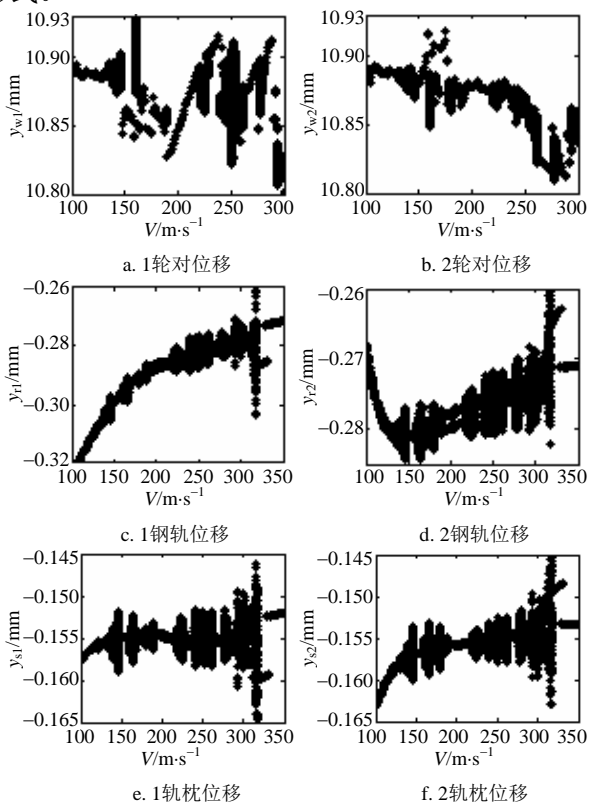


图3 车速与各部件位移关系

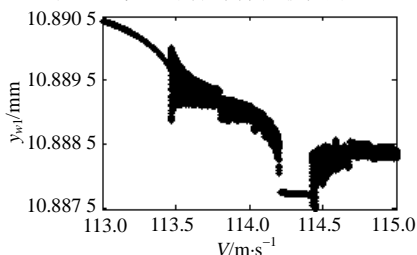


图4 1轮对局部分岔图

1轮对的局部分岔图如图4所示,从图中可确定系统临界速度为113.47 m/s。1轮对在速度小于临界速度时位移是单值的,振动处于平稳状态;当速度大于临界速度后,则处于多周期振动状态,开始出现分岔和失稳,此时振动情况比较复杂;当速度增

大到114.20~114.43 m/s(称为第二临界速度区间)时,则又处于1周期振动状态,再次处于平稳状态。其他部件局部分岔图与此类似,限于篇幅,本文不再全部列出。

4 结论

本文对集总参数简化模型轮轨耦合非线性稳定性与分岔进行了研究。分析了非线性Hertz接触力作用下,模型各部件位移随车辆运行速度的变化情况。数值结果表明,当车辆运行速度较小时,整个系统处于平稳运行状态。当车辆运行速度达到临界速度时,系统开始出现分岔而做非周期运动。如果车辆运行速度继续增加,则系统各部件的振动幅度变得越来越大,此时系统振动情况比较复杂。当速度继续增大到第二临界速度区间时,系统又可能处于另一类平稳运行状态,即只要车辆运行速度处于某个临界速度区间内,系统就可能处于平稳运行状态。

参考文献

- [1] SIMON I. Handbook of railway vehicle dynamics[M]. Boca Raton: CRC Press, 2006.
- [2] HANS T. Does a critical speed for railroad vehicles exist?[C]// Proceeding of the 1994 ASME/IEEE/AREA Joint Railroad Conference. Chicago, USA: [s.n.], 1994: 125-131.
- [3] 刘宏友. 高速列车中的关键动力学问题研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2003.
LIU Hong-you. Study on the key dynamic problems in high-speed train[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003.
- [4] ZENG Jing, WU Ping-bo. Stability analysis of high speed railway vehicles[J]. JSME International Journal, Series C, 47(2): 464-470.
- [5] CHRISTIAN K P. Chaos in railway bogie[J]. Acta Mechanica, 1986, 61: 393-421.
- [6] CARBOR S. Chaotic motion of wheels[J]. Vehicle System Dynamics, 1991, 20(6): 341-351.
- [7] 李万祥, 郑国忠, 王志荣. 车辆垂向振动的Hopf分叉[J]. 铁道机车车辆, 2002, 3: 6-7.
LI Wan-xiang, ZHENG Guo-zhong, WANG Zhi-rong. Hopf bifurcations of vehicle vertical oscillation[J]. Railway Locomotive & Car, 2002, 3: 6-7.
- [8] YANG Shao-pu, SHEN Yong-jun. Recent advances in dynamics and control of hysteretic nonlinear system[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 9(64): 1-15.
- [9] 练松良. 轨道动力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 2003.
LIAN Song-liang. Rail dynamics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2003.
- [10] 翟婉明. 车辆—轨道耦合动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997.
ZHAI Wan-ming. Vehicle-track coupling dynamics[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1997.