

新三维分段线性混沌系统

乔晓华, 包伯成

(江苏技术师范学院电气信息工程学院 江苏 常州 213001)

【摘要】提出了一个新三维分段线性混沌系统, 研究了新系统的对称性和不变性、耗散性和吸引子的存在性、平衡点及稳定性等基本动力学特性。利用相轨图、庞加莱映射、李雅普诺夫指数谱和分岔图等数值仿真手段, 验证了该系统能运行在混沌和周期轨道, 具有丰富的动力学行为, 并能通过一个常数控制器控制到不同形状混沌吸引子的混沌轨道或周期轨道或一个有界点。

关键词 吸引子; 混沌系统; 常数控制器; 分段线性

中图分类号 TP271

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.04.021

A New Three-Dimensional Piecewise-Linear Chaotic System

QIAO Xiao-hua and BAO Bo-cheng

(School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology Changzhou Jiangsu 213001 China)

Abstract A new three-dimensional piecewise-linear chaotic system is proposed. Some dynamical characteristics of this system including symmetry and invariance, dissipativity and existence of attractor, equilibrium, and stability are investigated in detail. By numerical simulating with Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagram, Poincaré mapping, and phase portrait, this paper verifies that the proposed system has abundant dynamical behaviors. It can operate on chaotic and periodic orbits and can evolve into chaos with difform chaotic attractor or period or limited point by a constant controller.

Key words attractor; chaotic system; constant controller; piecewise-linear

自文献[1]采用线性反馈控制方法控制混沌Lorenz系统^[2]而发现了一种与混沌Lorenz系统类似但不拓扑等价的混沌Chen系统后, 引起了研究者寻找新的混沌系统并对其非线性动力学现象和应用等研究的极大兴趣。文献[3]发现了混沌Lü系统^[3]和连接Lorenz、Chen和Lü三个混沌系统的统一混沌系统^[4]; 文献[5-8]陆续提出了一些新的与以上系统类似但不拓扑等价的三维连续自治混沌系统。

除了上述连续光滑非线性混沌系统被提出之外, 也有不少研究者利用分段线性或非线性控制器实现了新的混沌系统。文献[9]提出了一个四维多分段线性系统, 发现了系统的超混沌现象; 而文献[10-11]先在类达芬(Duffing-like)系统上加载一个分段非线性二次函数 $x|x|$ 产生了混沌信号, 随后在一个二阶线性系统上引入分段非线性二次函数的反馈控制器实现了另一个三阶混沌系统; 同时, 文献[12-16]开展了这些新的混沌系统的动力学特性、电路实现、控制与同步及混沌应用等诸多方面的研究工作, 并取得了丰富的具有理论意义和实际价值的研究

成果。

混沌在混沌保密系统和混沌信息加密等信息工程领域得到了广泛的应用。但迄今还没有一个生成混沌的系统方法。因此, 如何生成混沌信号将是混沌研究领域内的一个关键技术。本文结合Lorenz系统族方程的特点, 采用分段线性的方法, 提出了一个含有分段线性项的三维连续自治耗散混沌系统, 其系统方程结构简单, 而且在较宽的参数区间内能产生混沌信号。新混沌系统具有丰富的动力学行为, 并能通过一个常数控制器控制到不同形状混沌吸引子的混沌轨道或周期轨道或一个有界点。

1 三维分段线性混沌系统

1.1 混沌吸引子

本文的新系统是一个含有分段线性项和二次非线性项的混沌系统, 其数学模型描写如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = yz + c \\ \dot{y} = a(x - y) \\ \dot{z} = b - |x + y| \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2008-10-20; 修回日期: 2009-03-02

基金项目: 江苏省高校自然科学基金计划(02KJD510016)

作者简介: 乔晓华(1960-), 男, 副教授, 主要从事混沌理论与应用、非线性电路与系统等方面的研究。

式中 a 和 b 为实常数; c 为常数控制器。当 $a = 3, b = 4, c = 0$ 时, 混沌吸引子的相轨图如图1所示, 庞加莱映射如图2所示。利用Jacobia方法计算李雅普诺夫指数, 得:

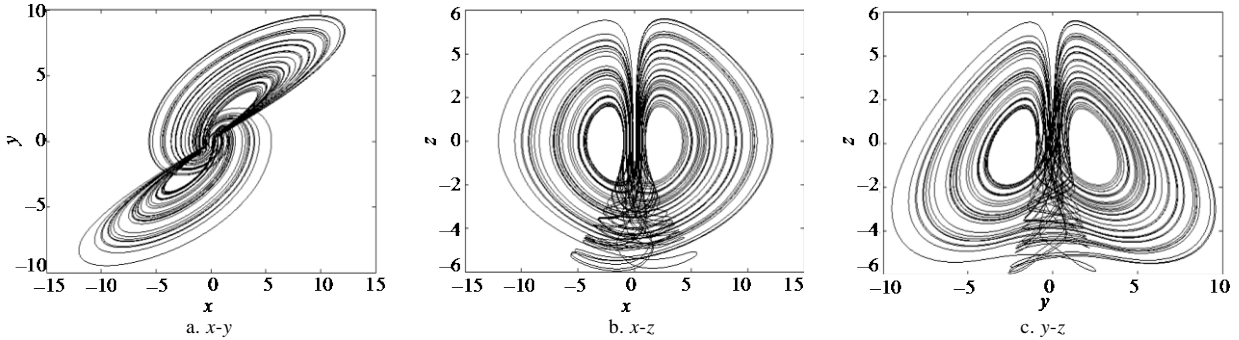


图1 式(1)在 $a=3$ 时的相轨图

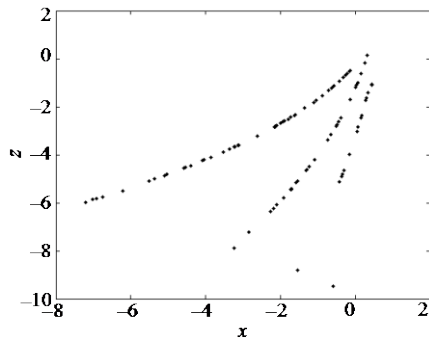


图2 式(1)在 $y = 0.5$ 截面上的庞加莱映射

1.2 基本的动力学分析

(1) 对称性和不变性

当 $c = 0$ 时, 变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 后, 系统的方程仍保持不变, 即系统的图像关于 z 轴对称, 且这种对称性对系统所有的参数都保持不变。

(2) 耗散性和吸引子的存在性

对于式(1), 有:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a \tag{2}$$

当 $a > 0$ 时, 则式(1)是耗散的, 且以指数形式收敛 $\dot{V} = -aV$, 即体积元 V_0 在时刻 t 时收缩为体积元 $V(t) = V_0 e^{-(a-1)t}$ 。这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个体积元以指数率 $-a$ 收缩到零。因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上。

(3) 平衡点及稳定性

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 即 $yz+c=0, a(x-y)=0, b-|x+y|=0$ 。

此时系统有两个平衡点 S_1, S_2 :

$$S_1=(0.5b, 0.5b, -2c/b), S_2=(-0.5b, -0.5b, 2c/b)$$

当 $c=0$ 时, 这两个平衡点对称地落在坐标原点的两侧。

在平衡点 S_1 和 S_2 线性化式(1)得到Jacobian矩阵:

$$LE_1=0.317, LE_2=0, LE_3=-3.3209$$

该新系统的李雅普诺夫维数为 $D_L = 2.0955$ 。从新系统的各个相轨图、庞加莱映射以及系统的李雅普诺夫指数和维数可知该系统为混沌系统。

$$J_{S_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ a & -a & 0 \\ -\text{sgn}(x) & -\text{sgn}(y) & 0 \end{bmatrix}_{S_{1,2}} \tag{3}$$

对平衡点 S_1 , 其特征方程为:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + (0.5b + 2ac/b)\lambda + ab = 0 \tag{4}$$

由Routh-Hurwitz判据, 当 $a > 0, b > 0$ 且满足 $c < b^2/4a$ 时, 平衡点 S_1 是不稳定的; 对平衡点 S_2 , 其特征方程为:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + (0.5b - 2ac/b)\lambda + ab = 0 \tag{5}$$

同样地, 由Routh-Hurwitz判据, 当 $a > 0, b > 0$ 且满足 $c > -b^2/4a$ 时, 平衡点 S_2 是不稳定的。即对于式(1), 当 $a > 0, b > 0$ 时且常数 c 满足关系式:

$$-b^2/4a < c < b^2/4a \tag{6}$$

式(1)的两个平衡点 S_1 和 S_2 都是不稳定的。

当参数 $a = 3, b = 4, c = 0$ 时, 平衡点 S_1 和 S_2 的特征方程相同, 有唯一的负实根 $\lambda_1 = -3.4348$ 和两个实部为正的共轭复根 $\lambda_{2,3} = 0.2174 \pm 1.8564i$ 。从而得知, 平衡点 S_1 和 S_2 均为不稳定的鞍焦点, 式(1)会在平衡点处出现霍普夫分岔。

当参数 $a = 3, b = 4, c \neq 0$ 时, 式(1)在常数控制器的参数区间 $-4/3 \leq c \leq 4/3$ 内是不稳定的。

2 混沌系统的动力学分析

2.1 无常数控制器

从上面分析可知, 当 $a > 0, b > 0$ 和 $c = 0$ 时, 系统平衡点是不稳定的; 随着参数的改变, 该系统将处于不同的状态。下面利用数值仿真手段, 分析各个系统参数变化时, 系统的变化情况。

(1) $a = 3, b$ 改变

式(1)随参数 b 变化的李雅普诺夫指数谱如图3a所示, 对应的状态变量 y 的分岔图如图3b所示。从图

3中可以观察到, 式(1)在较宽的参数区间内是混沌的, 其李雅普诺夫指数为一个正值、一个零值和一个负值, 在分岔图上表现是一种始终限于有限区域且轨道永不重复的、形态复杂的运动。

同时, 式(1)主要的混沌区间为 $2.32 < b \leq 10$, 其中有两处明显的周期窗, 分别出现在 $b = 5.45$ 和 $b = 7.9$

附近。周期窗往往在系统的动力学行为演变过程中起着十分重要的作用, 会引发系统运行轨道状态突变或混沌危机等非线性物理现象。除了以上混沌区域之外, 在 $0 < b \leq 2.32$ 区间内, 系统轨道交替运行在周期态或混沌态。随着参数 b 的逐步增大, 六种典型的周期和混沌吸引子的相轨图如图4所示。

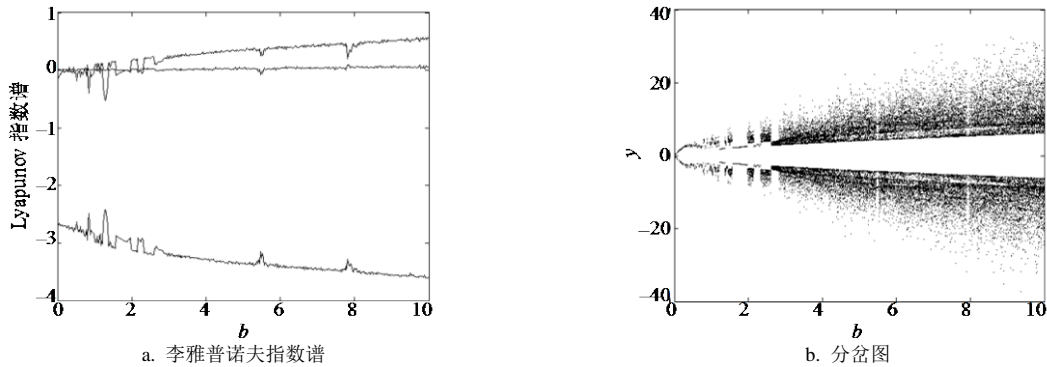


图3 式(1)随参数 b 变化的李雅普诺夫指数谱与分岔图

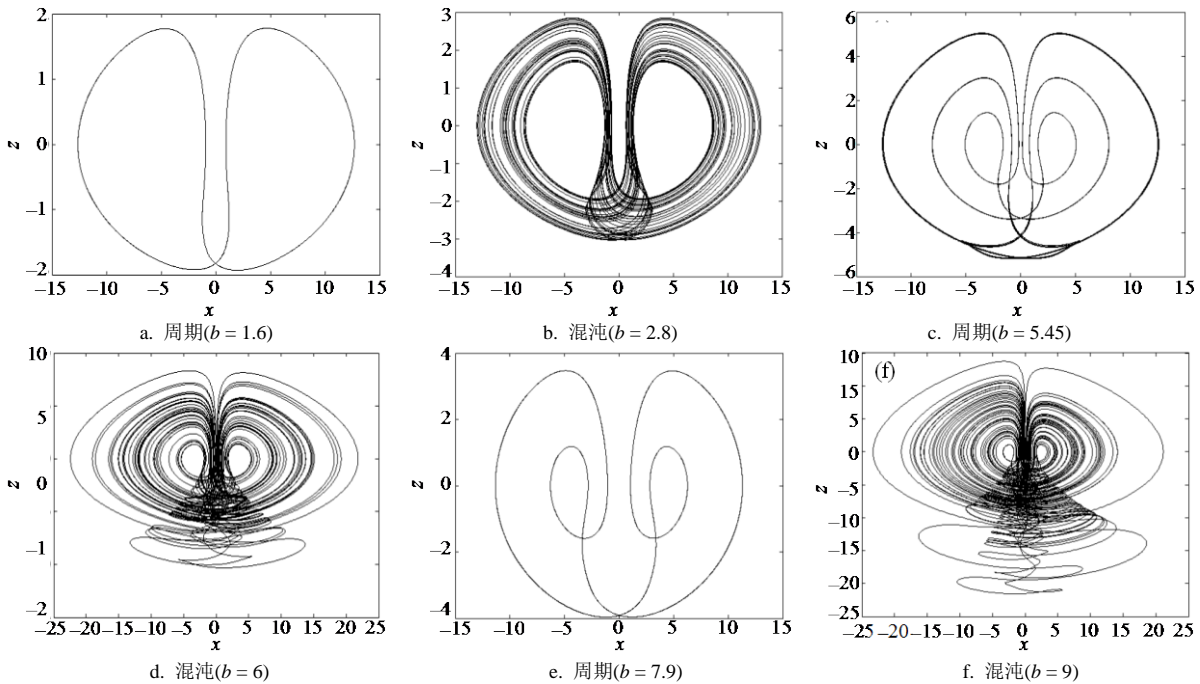


图4 式(1)在 $a = 3$ 时的相轨图

(2) $b = 4$, a 改变

式(1)随参数 a 变化的李雅普诺夫指数谱如图5a所示, 对应的状态变量 y 的分岔图如图5b所示。从图5中可以观察到, 式(1)在 $0 < a \leq 5$ 区间内几乎处于鲁棒混沌态, 只有在 $a = 2.13$ 附近出现了一个小的周期窗; 在 $5 < a \leq 5.76$ 区间内位于周期态; 在 $5.76 < a \leq 8$ 区间内, 系统轨道交替运行在周期态或混沌态, 此参数区间在设计混沌系统时应加以避免, 系统的状态会因参数小的扰动而改变。几种典型的周期和混沌吸引子的相轨图如图6所示。

2.2 有常数控制器

当 $a = 3$, $b = 4$ 时, 式(1)的两个平衡点在参数区间 $-4/3 \leq c \leq 4/3$ 内是不稳定的, 在此区间外有一个平衡点是稳定的, 稳定的平衡点会致使系统将趋向一个有界点。

图7给出了式(1)随控制参数 c 变化的李雅普诺夫指数谱及其状态变量 y 的分岔图。从图7中可以观察到, 式(1)在 $-1.5 \leq c \leq 1.5$ 区间内动力学特性具有一定的对称性, 其分岔图是关于 y 坐标奇对称的。由此可以判断出式(1)的吸引子相轨图也是奇对称的。在

-1.32 ≤ c ≤ 1.32 区间内, 式(1)运行轨道处于混沌态, 具有一个正值、一个零值和一个负值的李雅普诺夫指数。在此区间内, 存在多个周期窗口, 主要的周期窗出现在 c = -0.825, -0.141, 0.141, 0.825 等附近。随着 c 从负值逐步增大, 在负值区间式(1)从一个有界点跳变成不稳定的周期1运行轨道, 历经正向倍周期分岔后进入混沌轨道; 在正值区间, 式(1)则从混沌轨道经周期减半逆分岔后转变成周期1轨道, 然后再

趋向一个有界点。可见数值仿真的结果与上述平衡点稳定性分析的结果相符。图8给出了几种典型的具有对称性的周期和混沌吸引子相轨图。从以上图中不难判断出, 单螺旋混沌吸引子将在 -0.76 < c < 0.76 区间内转变成双螺旋混沌吸引子, 且在负值区间内的单螺旋混沌吸引子是双螺旋混沌吸引子的下半部分, 而在正值区间内的单螺旋混沌吸引子则转变成双螺旋混沌吸引子的上半部分。

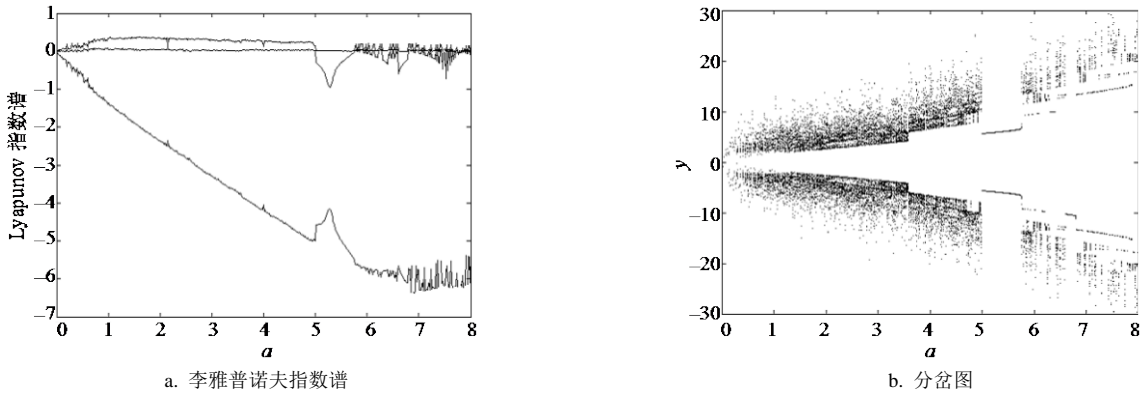


图5 式(1)随参数 a 变化的李雅普诺夫指数谱与分岔图

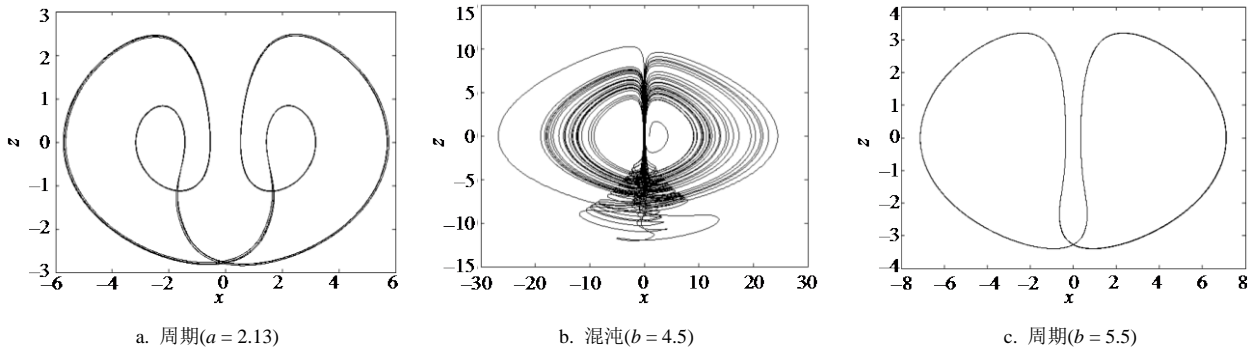


图6 b = 4 时式(1)的相轨图

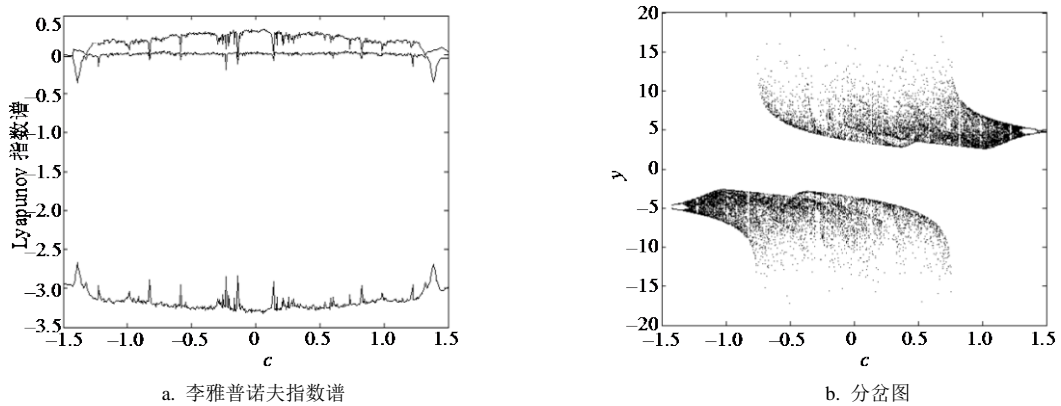
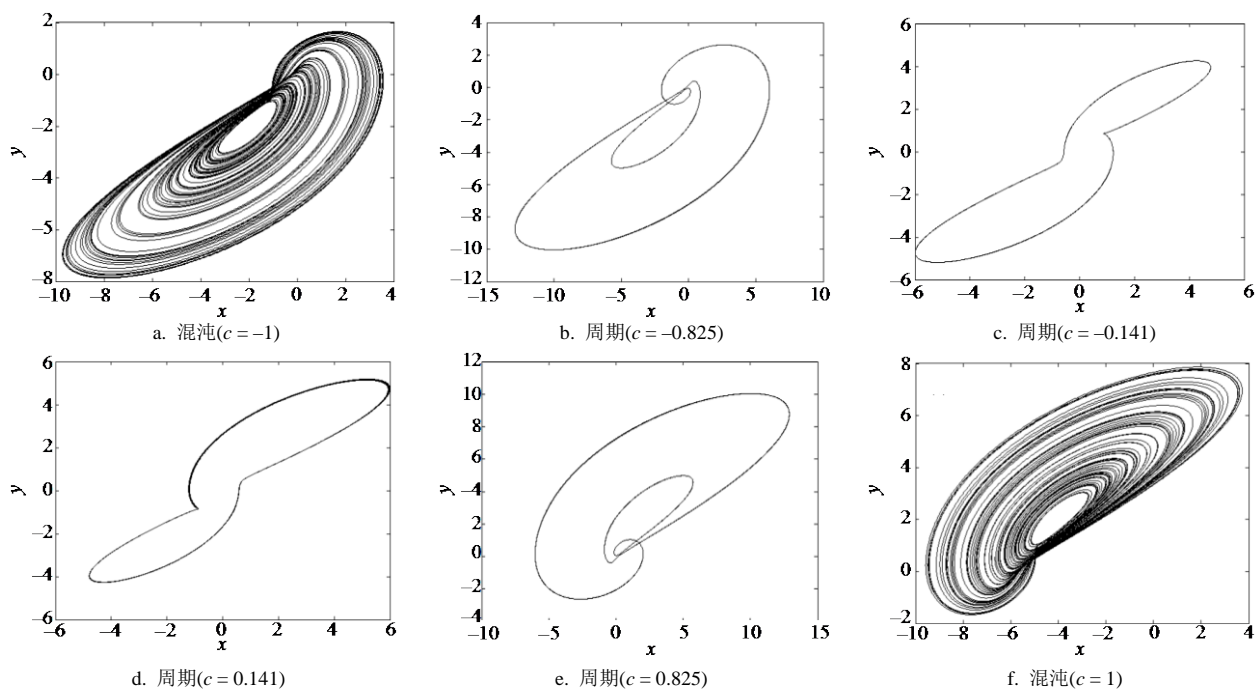


图7 式(1)随参数 c 变化的李雅普诺夫指数谱与分岔图

图8 式(1)在 $a=3$ 和 $b=4$ 时的相轨图

3 结束语

本文结合Lorenz系统族方程的特点,采用分段线性的方法,提出了一个含有分段线性项的三维混沌系统,其系统方程结构简单,有两个平衡点,能产生与Lorenz混沌系统相类似的反向蝴蝶形状的双螺旋混沌吸引子。利用相轨图、庞加莱映射、李雅普诺夫指数谱和分岔图等数值仿真手段,验证了新系统在较宽的参数区间内能产生混沌信号,具有丰富的动力学行为。同时,新系统通过一个常数控制器可以控制到具有不同形状混沌吸引子的混沌轨道或周期轨道或一个有界点。

开展分段线性混沌系统的研究具有十分重要的理论意义和实际价值,其电路形式的实现和动力学特性的深入研究将是作者以后的工作重点。

参考文献

- [1] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. Int J Bifur Chaos, 1999, 9(6): 1465-1466.
- [2] STEWART I. The Lorenz attractor exists[J]. Nature, 2002, 406: 948-949.
- [3] LÜ J, CHEN G. A new chaotic attractor coined[J]. Int J Bifur Chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [4] LÜ J, CHEN G, ZHANG S, et al. Bridge the gap between the Lorenz and the Chen system[J]. Int J Bifur Chaos, 2002, 12(12): 2917-2926.
- [5] LIU W, CHEN G. A new chaotic system and its generation[J]. Int J Bifur Chaos, 2003, 13(1): 261-267.
- [6] LIU C, LIU T, LIU K, et al. A new chaotic attractor[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22(5): 1031-1038.
- [7] BAO B, LI C, XU J, et al. New robust chaotic system with

exponential quadratic term[J]. Chin Phys, 2008, 17(11): 4022-4026.

- [8] QI G, CHEN G, DU S, et al. Analysis of a new chaotic attractor[J]. Physica A, 2005, 352: 295-308.
 - [9] TSUBONE T, SAITO T. Hyperchaos from a 4-D manifold piecewise-linear system[J]. IEEE Trans Circuits Sys-I, 1998, 45(9): 889-894.
 - [10] TANG K, MAN K, ZHONG G, et al. Generating chaos via $x|x|$ [J]. IEEE Trans Circuits Sys-I, 2001, 48(5): 636-641.
 - [11] TANG K, ZHONG G. Chaotification of linear continuous-time systems using simple nonlinear feedback[J]. Int J Bifur Chaos, 2003, 13(10): 3099-3106.
 - [12] BAO B, LIU Z. A hyperchaotic attractor coined from chaotic Lü system[J]. Chin Phys Lett, 2008, 25(7): 2396-2399.
 - [13] WANG G, LIU J, ZHENG X. Analysis and implementation of a new hyperchaotic system[J]. Chin Phys, 2007, 16(8): 2278-2284.
 - [14] JIA Q. Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control[J]. Physica A, 2007, 366: 217-222.
 - [15] 包伯成, 许建平, 刘中. 开关DC-DC变换器斜坡补偿的稳定性控制研究[J]. 电子科技大学学报, 2008, 37(3): 397-400.
 - [16] 陈滨, 刘光祜, 张勇, 等. 高保密性的时变参数混沌同步通信方法[J]. 电子科技大学学报, 2007, 36(2): 193-195.
- CHEN Bin, LIU Guang-hu, ZHANG Y, et al. A high secure performance method of chaotic synchronized communication based on time-varying parameters[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2007, 36(2): 193-195.

编辑 税红