

# 含间隙系统的约束时间最优预测控制

窦丽华<sup>1</sup>, 董领逊<sup>1</sup>, 张娟<sup>1</sup>, 冯贺平<sup>2</sup>

(1. 北京理工大学信息科学技术学院 北京 海淀区 100081; 2. 河北软件职业技术学院智能工程系 河北 保定 071000)

**【摘要】**为了解决含间隙机械系统最优控制的计算复杂度问题, 设计了基于分段仿射(PWA)模型的约束时间最优预测控制器。为了降低在线控制的计算复杂度, 利用动态规划方法在模型的状态和参考跟踪速度的范围内提前计算出了离线的控制律。在跟踪参考速度的实验中, 约束时间最优预测控制器具有较好的跟踪控制性能, 与约束有限时间最优控制器相比, 计算时间降低了十几倍, 因此, 适合于小采样时间系统的实时跟踪控制。

**关键词** 间隙模式; 约束时间最优预测控制器; 混杂系统; PWA模型

中图分类号 TP273.1

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.06.014

## Constrained Time-Optimal Predictive Control for a Class of Systems with Backlash

DOU Li-hua<sup>1</sup>, DONG Ling-xun<sup>1</sup>, ZHANG Juan<sup>1</sup>, and FENG He-ping<sup>2</sup>

(1. Department of Information Science and Technology, Beijing Institute of Technology Haidian Beijing 100081;

2. Department of Intelligent Engineering, Hebei Software Professional Technology Institute Baoding Hebei 071000)

**Abstract** A constrained time-optimal predictive controller based on the piecewise affine (PWA) model is designed for solving the computation complexity of optimal control problem for mechanical system with backlash. For reducing computation burden of online implementation, the control law is computed offline for the range of states and references tracking speed by dynamic programming. In the experiments of tracking the reference speed, it is demonstrated that the constrained time-optimal predictive controller has better tracking control performance and reduces the computation time about ten times when compared with the constrained finite time optimal controller, therefore, the proposed approach and controller are suitable for real-time tracking control for systems with small sampling time.

**Key words** backlash mode; constrained time-optimal predictive controller; hybrid system; PWA model

间隙指的是两个相邻的可移动部分之间的相互作用, 可以是旋转运动或是线性运动。当系统输入从加速到制动或从制动到加速时, 传输间隙就会引起很多问题。在较短的时间间隔内, 驱动力矩不能立刻传输到负载端。当系统状态经历间隙时, 突然的接触会导致施加在负载端的转矩发生突变, 从而导致不可预期的碰撞和对机械部件的损伤。而且, 由于间隙的不可微的非线性特性, 使得对间隙的补偿变得非常困难, 增加了传动系统控制的复杂度。如果不消除间隙的影响, 除了造成输出误差外, 系统的性能可能会因极限环振荡或冲击而降低, 甚至变得不稳定。因此, 对机械系统存在的间隙非线性进行深入研究, 具有重要的理论意义和工程意义。

许多学者提出了对间隙进行建模与补偿的方法。文献[1]中提出了利用神经网络进行静态和动态

补偿来提高含间隙非线性系统的跟踪性能。文献[2]提出了一种模型预测控制和采样卡尔曼滤波相结合的方法来控制一类含间隙的简化的传输系统。文献[3]提出了一种二阶滑动模态观测器结合辨识算法控制含间隙的机电系统。基于神经网络的间隙补偿需要很大的计算量才能生成电机转矩和轴转矩。传统的模型预测控制的在线实时控制方法存在计算量大的问题。

对于含间隙机械系统, 本文将其运行模式分为“间隙模式”和“接触模式”。其中, 间隙模式指的是两个机械部分没有接触, 而接触模式则指两个机械部分相互接触而且伴随有转矩的传输。两种模式之间存在的内在切换使得该系统成为一个典型的混杂系统。所以, 混杂系统理论和方法适合于对其进行建模和最优控制设计<sup>[4]</sup>。本文分析了间隙发生时

收稿日期: 2008-06-03; 修回日期: 2008-11-11

基金项目: 北京市教育委员会共建基金(XK100070532)

作者简介: 窦丽华(1961-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事复杂系统的建模与优化控制方面的研究。

的混杂特性,建立了PWA模型<sup>[5]</sup>;最后,基于PWA模型设计了约束时间最优预测控制器来解决含间隙  $T_m$  机械系统的最优控制问题。由于系统的采样时间较小,利用混合整数规划求解最优控制变得不可行。为了克服计算复杂度问题,利用动态规划方法在模型的状态和参考跟踪速度的范围内提前计算,得到离线的控制律。在跟踪参考速度的实验中<sup>[6]</sup>,表明了约束时间最优预测控制器(CTOPC)有较好的跟踪控制效果,并且与约束有限时间最优控制器(CFTOC)<sup>[7]</sup>相比具有较少的计算时间,适合于小采样时间系统的实时跟踪控制要求。

## 1 含间隙机械系统的混杂建模

### 1.1 混杂系统和PWA模型

混杂系统是指同时包含连续状态和离散状态的系统,连续状态描述的是连续动态系统,而离散状态描述的是不同系统动力学之间的逻辑关系。逻辑关系可以是切换关系<sup>[8]</sup>、数字电路、软件程序或间隙。含间隙机械系统的混杂本质使得可以利用混杂系统理论对其进行精确的建模和控制。本文所建立的混杂模型是PWA模型的形式:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_{PWA}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{u}_k + \mathbf{f}^{(i)} \quad (1)$$

如果  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \in D^{(i)}$ ,

$$D^{(i)} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} (P_x)^{(i)} & (P_u)^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq (P_0)^{(i)} \right\}$$

式中  $k \geq 0$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为状态向量;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  为控制向量;  $\{D^{(i)}\}_{i=1}^p$  为  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$  空间的有界多面体划分。约束  $(P_x)^{(i)} \mathbf{x} + (P_u)^{(i)} \mathbf{u} \leq (P_0)^{(i)}$  定义的是状态更新方程有效且同时满足状态变量与输入变量约束条件的区域。

### 1.2 间隙的混杂PWA模型

间隙是机械系统中常见的非线性,根据含间隙机械系统的具体组成情况,必须采用不同的数学模型进行建模。本文主要针对图1所示的模型分析其间隙行为,该模型为一个两质量块模型,间隙存在于轴上,电机  $M_1$  表示驱动部分,  $J_m$  表示电机端的惯量,  $J_l$  表示负载端的惯量。弹性系数  $k_s$  和阻尼系数  $c_s$  描述具有阻尼的柔性轴。阻尼器  $c_m$  和  $c_l$  均表示粘滞摩擦。电机  $M_2$  用于描述所产生的干扰转矩。间隙角是系统中的一个重要参数,记为  $2\alpha$ 。

质量块之间通过柔性轴或是弹簧连接起来。在不考虑质量或惯量时,系统的建模可以简化。利用力矩平衡原理,图2可由下面的微分方程描述:

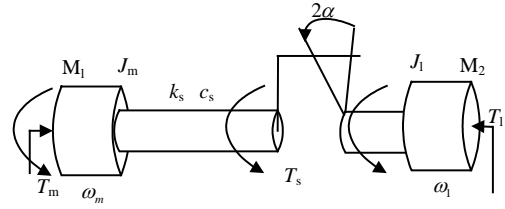


图1 两质量块模型示意图

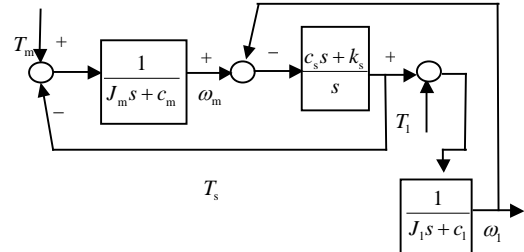


图2 两质量块模型方框图

$$\begin{cases} J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -c_m \omega_m + T_m - T_s \\ J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = -c_l \omega_l + T_s + T_l \end{cases} \quad (2)$$

式中  $T_m$  为电机转矩;  $T_s$  为轴转矩;  $T_l$  为负载转矩。 $T_l$  作为干扰,在标称条件下看作零,轴转矩为:

$$T_s = \begin{cases} k_s(\Delta\theta - \theta_b) + c_s(\omega_m - \omega_l) & \text{接触模式} \\ 0 & \text{间隙模式} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\Delta\theta = \theta_m - \theta_l$  和  $\theta_b$  分别表示轴位移和间隙位置。间隙角  $\theta_b$  可由非线性微分方程表示<sup>[9]</sup>:

$$\frac{d\theta_b(t)}{dt} = \begin{cases} \max[0, \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \frac{k_s}{c_s}(\Delta\theta - \theta_b)] & \theta_b = -\alpha \\ \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \frac{k_s}{c_s}(\Delta\theta - \theta_b) & |\theta_b| < \alpha \\ \min[0, \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \frac{k_s}{c_s}(\Delta\theta - \theta_b)] & \theta_b = \alpha \end{cases}$$

式中  $\alpha$  为半间隙角。从该微分方程中可以得到系统处于间隙模式的条件。当下面3个条件之一成立时,系统处于间隙模式:

$$|\theta_b| < \alpha \quad (4a)$$

$$\theta_b = \alpha \wedge \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \frac{k_s}{c_s}(\Delta\theta - \theta_b) < 0 \quad (4b)$$

$$\theta_b = -\alpha \wedge \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \frac{k_s}{c_s}(\Delta\theta - \theta_b) > 0 \quad (4c)$$

当系统处于正接触状态或负接触状态时,条件式(4b)或式(4c)为真。间隙和接触模式在间隙角  $\theta_b$  及微分  $\dot{\theta}_b$  的分布情况如图3所示。图中,接触模式由两条粗线表示。取状态向量  $\mathbf{x}(t) = [\omega_m, \omega_l, \theta_m, \theta_l, \theta_b]^T$ ,可以得到一个PWA状态更新方程为:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} A_{co}x(t) + Bu(t) & \text{正接触状态} \\ A_{bl}x(t) + Bu(t) & \text{间隙状态} \\ A_{co}x(t) + Bu(t) & \text{负接触状态} \end{cases} \quad (5)$$

$$A_{co} = \begin{bmatrix} -\frac{c_m + c_s}{J_m} & \frac{c_s}{J_m} & -\frac{k_s}{J_m} & \frac{k_s}{J_m} & \frac{k_s}{J_m} \\ \frac{c_s}{J_1} & -\frac{c_1 + c_s}{J_1} & \frac{k_s}{J_1} & -\frac{k_s}{J_1} & -\frac{k_s}{J_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{bl} = \begin{bmatrix} -\frac{c_m}{J_m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{k_s}{c_s} & -\frac{k_s}{c_s} & -\frac{k_s}{c_s} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K \\ J_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

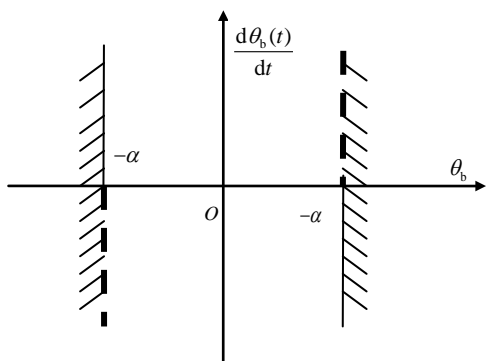


图3 间隙模式和接触模式分布图：虚线表示接触模式，两竖线之间的空白空间表示间隙模式

本文采用基于离散时间模型的模型预测控制，所以必须离散化式(5)方程中的连续时间模型，通过欧拉离散化方法对其进行离散。最后，通过HYSDEL语言编程结合多参数工具箱(MPT)<sup>[10]</sup>得到离散时间PWA模型为：

$$x[k+1] = \begin{cases} \tilde{A}_{co}x[k] + \tilde{B}u[k] & \text{正接触状态} \\ \tilde{A}_{bl}x[k] + \tilde{B}u[k] & \text{间隙状态} \\ \tilde{A}_{co}x[k] + \tilde{B}u[k] & \text{负接触状态} \end{cases} \quad (6)$$

式中 符号“~”表示对应于连续时间矩阵的离散时间矩阵。

## 2 混杂模型预测控制器设计

### 2.1 系统扩展与约束条件

含间隙机械系统的最优参考跟踪问题在增广的

状态和输入空间中扩展为：

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \\ r_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\bar{u}_k = u_k - u_{k-1} \quad (8)$$

式中  $r_k \in \mathbb{R}^p$  表示系统输出  $y_k$  应当跟踪的参考速度，且  $\bar{u}_k$  控制器作用的变化(在稳态时对于任何参考速度而言都等于零)。增广的状态和输入为  $\bar{X} \subset \mathbb{R}^5$ ，并且增广系统的输入集合由  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^1$  表示。增广系统的输出  $\bar{y}_k$  为跟踪误差本身：

$$\bar{y}_k = r_k - y_k \quad (9)$$

利用式(7)~式(9)实现的增广PWA模型为：

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}_i \bar{x}_k + \bar{B}_i \bar{u}_k + \bar{f}_i \quad (10a)$$

$$\bar{y}_k = \bar{C}_i \bar{x}_k \quad (10b)$$

$$\text{如果 } [\bar{x}_k^T \ \bar{u}_k^T]^T \in \bar{D}_i \quad i=1,2,\dots,s \quad (10c)$$

在下文中，式(10a)~式(10c)可以由下面简短形式表示：

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{f}_{PWA}(\bar{x}_k, \bar{u}_k) \quad (11)$$

而且，在不失一般性的情况下，假定多面体  $\bar{D}_i$  ( $i=1,2,\dots,s$ )组合了状态和输入上施加的所有约束，这些约束或者是物理过程的约束条件，或者是引入的防止机械部件受到过度磨损和冲击力的软约束：

$$C^x \bar{x}_k + C^u \bar{u}_k \leq C^c \quad (12)$$

从式(12)提取出的可行增广状态集表示为  $P = \{\bar{x} | P^x \bar{x} \leq P^c\}$ ，并且可以通过下式计算：

$$P = \{\bar{x} | \exists \bar{u} : C^x \bar{x} + C^u \bar{u} \leq C^c\} \quad (13)$$

式中  $C^x$ 、 $C^u$ 、 $C^c$ 、 $P^x$  和  $P^c$  为适当维数的矩阵。在实验中，实际上可能的间隙角在  $-5^\circ \sim 5^\circ$  的范围内；电机侧的角速度  $\omega_m$  限制在  $-\omega_{m,lim} \sim \omega_{m,lim}$  之间，其中  $\omega_{m,lim}$  等于50 rad/s；输入信号  $u_k$  限制在  $-5 \sim 5$  V 之间；对于  $\bar{u}$  的约束与  $u_k$  相同。

### 2.2 离线计算

对于含间隙机械系统的最优控制可采用两种控制器，即CFTOC和CTOPC。两种控制策略都可以确保满足变量的约束条件。在CFTOC中，最小化的标准为预测水平上的状态和输入的范数之和。对于调节器来说，离线求得的控制律比较简单，但是在参考跟踪的情况下，由于最终的查找表过于复杂，因此，不适合参考跟踪的控制。另一方面，对于给定的状态，CTOPC可以找到使状态在最小时间内进入状态空间中的预定集合的控制序列。这种预定的集合通常具有控制不变性。CTOPC包括两部分：找到不变集和确保集合不变性的控制律；找到不变集外

的所有状态的控制律, 从而使得状态在最小时间内进入不变集。与CFTOC相比, CTOPC具有比较简单的控制律。CTOPC的求解包括两个步骤:

(1) 不变集的计算。

在跟踪原点  $T^0$  的内部计算控制不变集为<sup>[11]</sup>:

$$X^I = \{\bar{x} | \exists \bar{u} : \bar{f}_{PWA}(\bar{x}, \bar{u}) \in X^I\} \quad (14)$$

式中 跟踪原点  $T^0$  为可行增广状态  $P$  的集合的预定义多面体子集。本文中, 跟踪原点在围绕超平面  $r = y$  和  $\omega_m = 0$  的相交部分进行定义:

$$T^0 = \{\bar{x} \in P | |\omega_m| < 1, |r - y| < 0.1\} \quad (15)$$

不变集  $X^I$  一般以迭代的方式求解。在迭代步骤  $q$  (起始于  $q=0$ ), 计算集合  $H_i^{0,q} \subset \bar{X} \times \bar{U}$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ , 使得在满足由多面体  $\bar{D}_i$  定义的所有约束条件的同时, 增广系统的状态  $\bar{x}$  可以在一个时刻内进入  $T^q$ 。

$$H_i^{0,q} = \{[\bar{x}^T \ \bar{u}^T]^T \in \bar{D}_i | \bar{A}_i \bar{x} + \bar{B}_i \bar{u} + \bar{f}_i \in T^q\} \quad (16)$$

然后, 下一个迭代步骤的目标集合通过下式计算:

$$T^{q+1} = T^q \cap \left( \bigcup_{i=1}^s R_i^{0,q} \right) \quad (17)$$

式中  $R_i^{0,q}$  表示  $H_i^{0,q}$  在  $\bar{X}$  空间的映射, 即:

$$R_i^{0,q} = \{\bar{x} \in \bar{X} | \exists \bar{u} \in \bar{U} : [\bar{x}^T \ \bar{u}^T]^T \in H_i^{0,q}\}$$

(2) 时间最优预测控制律的计算。

对于所有  $\bar{x}_0 \notin X^I$ , 约束时间最优预测控制律的计算为:

$$J^*(\bar{x}_0) = \min_{U_{k,k}} k$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \bar{x}_{k'} = \bar{f}_{PWA}(\bar{x}_{k'-1}, \bar{u}_{k'-1}) \\ \bar{x}_{k'} \in P \\ k' = 1, 2, \dots, k \\ \bar{x}_k \in X^I \end{cases} \quad (18)$$

式中  $U_k = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}\}$ 。最优代价对应于最小数量的时间步骤, 状态  $\bar{x}_0$  可以在满足所有约束条件的同时进入不变集。第  $z$  个代价函数集合记作  $X^z$ ,  $z \in \{1, 2, \dots\}$  指的是对于所有  $\bar{x}$  来说代价  $J^*$  等于  $z$  的集合。

### 2.3 在线计算

控制器的在线实现很简单。对于给定的  $\bar{x}$ , 需要通过测试  $s$  个多面体隶属函数来找到当前活跃的动力学特性的集合:

$$A(\bar{x}) = \{i | 1 \leq i \leq s, \bar{x} \in \bar{P}_i\} \quad (19)$$

式中  $\bar{P}_i$  表示  $\bar{D}_i$  在  $\bar{X}$  空间的映射。然后, 针对集合  $H_i^z$ ,  $i \in A$  中的第一个多面体从  $X^0$  向着更高代价函

数集合执行搜索, 并给出可行控制律  $\bar{u}$  的非空间隔。最后, 控制律  $\bar{u}$  设定为找到的间隔的中间值。这样, 在线实现仅需要基本的控制器代码及存储  $\bar{P}_i$  和  $H_i^z$ 。而且, 在线控制算法是非迭代的, 仅仅包括基本的代数运算, 即乘、加和比较等, 从而, 大大降低了在线计算的复杂度。

## 3 实验结果

控制的目的是基于所建立的含间隙机械系统的PWA模型, 验证在满足系统约束的前提下, CTOPC跟踪给定参考速度时的控制效果, 以及在参考跟踪控制的情况下, 比较CFTOC与CTOPC的计算时间。实验过程采用的是离散时间的PWA模型, 离散采样时间设为  $T_s = 0.04$ 。

采用CTOPC方法的控制效果如图4所示, 从图4中可以得知, 基于PWA模型的CTOPC对于参考速度具有精确的跟踪效果, 同时, 能满足状态和输入的约束条件。表1为改变控制器的参数而得到的6组计算时间, 这些计算时间分别为当状态变量  $x$  和输入变量  $u$  选取不同权重的情况下, 所得到的求解控制律的计算时间。由表1可以看出, 对于参考跟踪控制问题, 由于采用了时间最优的控制方法并且在在线实现之前提前进行了离线控制律计算, 采用CTOPC方法的计算时间明显小于CFTOC的计算时间。

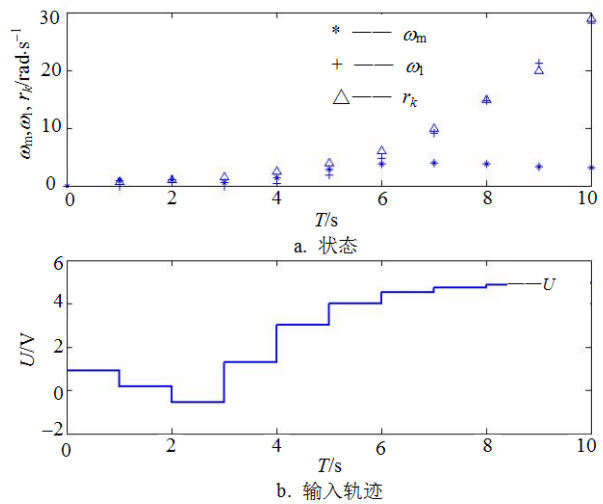


图4 CTOPC得到的状态和输入的轨迹

表1 CFTOC和CTOPC计算时间的比较

CFTOC的计算时间/s	CTOPC的计算时间/s
115.5	12.1
130.3	15.8
108.5	9.5
128.6	11.8
102.9	10.5
96.5	9.0

## 4 结 论

在混杂动态系统理论下对含间隙机械系统的控制问题进行了分析,建立了系统的混杂PWA模型。并且基于PWA模型,建立了CTOPC实现含间隙机械系统的参考跟踪,而且同时满足了所有预定的系统约束条件。在CTOPC中,计算不变集和计算最优控制律两个步骤确保了使状态在最小时间内进入状态空间中的预定集合内。在实验中,与CFTOC相比,对于参考跟踪问题而言,CTOPC具有明显较少的计算时间。最终的控制律确保了对于任何参考速度跟踪误差保持在较小的有界集内,并且通过离线计算得到查找表形式的控制律,从而简化了在线实现,减少了计算时间。下一步工作是分析基于混杂PWA模型的模型预测控制的鲁棒性问题。

### 参 考 文 献

- [1] RASTKO R S, VIR V P, FRANK L L. Intelligent compensation of actuator nonlinearities[C]//In CDC '03: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Hawaii: IEEE press, 2003: 4327-4332.
- [2] SAITO M, YAMAKITA M. MPC for a simplified transmission model with backlash using UKF[C]//In ICCA '06: Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications. Munich: IEEE press, 2006: 527-532.
- [3] MERZOUKI R, DAVILA J A, FRIDMAN L. Backlash phenomenon observation and identification in electromechanical system[J]. Control Engineering Practice, 2007, 15: 447-457.
- [4] BEMPORAD A, MORARI M. Control of systems integrating logic, dynamic, and constraints[J]. Automatica, 1999, 35(3): 407-427.
- [5] BORRELLI F, BAOTIC M, BEMPORAD A, et al. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems[J]. Automatica, 2005, 41: 1709-1721.
- [6] LI J H, WANG S A. Adaptive trajectory tracking control of wheeled mobile robots with nonholonomic constraint[J]. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2005, 3(4): 342-348.
- [7] VASAK M, BAOTIC M, MORARI M, et al. Constrained optimal control of an electronic throttle[J]. International Journal of Control, 2006, 79(5): 465-478.
- [8] 王定伟, 朱立东, 吴诗其. 一种双层小区结构中的切换控制策略[J]. 电子科技大学学报, 2003, 32(2): 116-120.  
WANG Ding-wei, ZHU Li-dong, WU Shi-qi. Handoff control strategy applied in hierarchical cell structure[J]. Journal of University Electronic Science Technology of China, 2003, 32(2): 116-120.
- [9] NORDIN M, GUTMAN. Robust linear design of an uncertain two-mass system with backlash[C]//Proceedings of the first IFAC Workshop in Automotive Control. Ascona: IFAC press 1995: 183-188.
- [10] KVASNICA M, GRIEDER P, BAOTIC M, et al. Multi-parametric toolbox(MPT)[J]. Lecture Notes in Computer Science. Hybrid Systems: Computation and Control. Springer, 2004, 2993: 448-462.
- [11] RAKOVIC S, GRIEDER P, KVASNICA M, et al. Computation of invariant sets for piecewise affine discrete time systems subject to bounded disturbances [C]//In CDC '04: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis: IEEE press, 2004: 1418-1423.

编辑 漆 蓉