

HARQ过程条件错误概率分析

龙 航, 王文博

(北京邮电大学泛网无线通信教育部重点实验室 北京 海淀区 100876)

【摘要】在混合自动请求重传(HARQ)技术应用中, 之前的传输失败是重传的前提, 合并后数据包中的噪声已不再是零均值高斯分布, 且与发射信号相关。然而, 在目前HARQ及其他类似技术的分析中, 普遍假设合并后的噪声仍服从零均值高斯分布, 导致对错误概率估计偏小。该文对重传合并后的条件错误概率进行了精确分析, 提出了条件错误概率的近似表达式, 为进一步分析提供了方法, 并比较了传统假设条件下的分析结果。在该假设条件下的错误概率估计与真实值的误差随数据包符号数的增加而减小。重传时信道增益越小, 误差越大。

关键词 错误概率; 高斯噪声; 混合自动请求重传; 概率分布; 无线通信系统

中图分类号 TN911.22

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.01.010

Conditional Error Probability Analysis in HARQ Process

LONG Hang and WANG Wen-bo

(Key Laboratory of Universal Wireless Communication of Ministry of Education,
Beijing University of Posts & Telecommunications Haiding Beijing 100876)

Abstract In hybrid automatic repeat request (HARQ) process, the failure of the first transmission is the condition of the retransmission. The distribution of the noise after combining is not zero-mean-Gaussian. Unfortunately, the assumption of zero-mean-Gaussian noise is widely used in the analysis of HARQ, as well as some similar technologies. Therefore, the estimation of the conditional error probability is smaller than the exact one. In this paper, the conditional error probability under non-zero-mean-Gaussian noise is exactly analyzed. An approximate expression of the exact conditional error probability is also presented for simplicity of application. The difference between the real error probability and estimation based on zero-mean-Gaussian noise assumption is more obvious if the number of symbols in a packet is small and the channel of retransmission is worse than that of the first transmission.

Key words error probability; Gaussian noise; HARQ; probability distributions; wireless telecommunication systems

混合自动请求重传(hybrid automatic repeat request, HARQ)技术是自动请求重传和前向纠错编码的结合, 是当前和未来各种无线通信系统^[1-2]中重要的闭环链路自适应技术。在HARQ过程中, 若重传时仍发送与第一次传输相同的信号, 接收端合并多次接收信号后的性能分析, 一般都要应用多次传输的信噪比之和^[3-4]。这种分析方法是基于合并后的噪声仍是与发射信号相独立的零均值高斯分布的假设的, 实际上以之前的传输失败为前提, 该假设并不成立。类似地, 在链路级-系统级(link-to-system, L2S)接口技术中^[5-6]对错误概率的估计也是不准确的。在其他类似技术如增量中继协议中^[7], 中继传

输以直接传输失败为条件, 因此基于信噪比叠加形式的分析^[7-8]也是不准确的。文献[9]认为传统方法对错误概率估计偏小, 提出了一种简单的条件误帧率估计方法, 但是估计值偏大。

本文对重传合并时的条件错误概率进行精确分析, 与传统的噪声零均值高斯分布假设下的估计进行比较, 并给出了条件错误概率的近似闭合表达式。

1 系统模型

在HARQ过程中, 第*i*次传输的接收信号为:

$$y_i = h_i x + n_i \quad (1)$$

式中 x 表示发射信号, 重传时信号不变; h_i 表示

收稿日期: 2008-08-08; 修回日期: 2009-04-07

基金项目: 国家自然科学基金(60802082); 教育部博士学科点新教师基金(200800131023)

作者简介: 龙 航(1984-), 男, 博士生, 主要从事MIMO及协同技术方面的研究。

第*i*次传输时的信道增益,不失一般性,可以假设 $h_i > 0$; n_i 表示噪声, $n_i \sim N(0, \sigma^2)$ 。定义第*i*次传输的接收信噪比为 $\gamma_i = h_i^2 / \sigma^2$ 。以两次传输接收端使用最大比合并算法为例进行分析说明,重传后接收端合并接收信号为:

$$\hat{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^2 h_j y_j}{\sum_{j=1}^2 h_j^2} = x + n' \quad (2)$$

其中

$$n' = \frac{h_1 n_1 + h_2 n_2}{h_1^2 + h_2^2} \quad (3)$$

式(3)表示合并后的等效噪声。若不考虑重传的条件是第1次传输失败,则 $n' \sim N(0, 1/(\gamma_1 + \gamma_2))$,这是传统分析方法中常用的假设,但以第1次传输失败为条件, n' 已不服从零均值高斯分布,且与发射信号 x 已非相互独立。传统的HARQ技术分析几乎都忽略了这一点。

定义 $f_1(h_1, \sigma^2)$ 表示在信道增益为 h_1 、噪声功率为 σ^2 时,第1次传输失败; $f_2(h_1, h_2, \sigma^2)$ 表示在第1次传输时信道增益为 h_1 ,第2次传输时信道增益为 h_2 ,噪声功率为 σ^2 ,将两次的接收信号进行最大比合并,第2次传输失败。在后面的描述中分别简称为 f_1 和 f_2 ; $p(\cdot)$ 表示事件 (\cdot) 发生的概率。

目前对HARQ技术的分析一般假设合并后噪声仍为零均值高斯分布,且与发射信号独立,因此直接用概率 $p(f_2)$ 代替条件概率 $p(f_2 | f_1)$ 。若重传时信号不变,则将两次传输的接收信噪比直接叠加作为等效信噪比。这种分析手段在HARQ技术和L2S接口技术研究中普遍应用^[3-6]。

然而,在第1次传输发生错误的条件下,合并后的噪声已非零均值高斯分布,且与发射信号不独立,第1次传输时噪声 n_1 可能很大, x 可能恰逢能量较小容易错判的星座点,因此,实际合并后的解调检测性能应差于零均值高斯分布假设下的结果。传统分析方法对合并后错误概率的估计偏小。

文献[9]中基于 $p(f_2 | \bar{f}_1) \approx 0$ 的假设,提出使用 $p(f_2) / p(f_1)$ 近似代替条件概率 $p(f_2 | f_1)$,但是文中关于该假设的合理性解释存在偷换概念的嫌疑。一般有如下关系式:

$$p(f_2) \leq p(f_2 | f_1) \leq p(f_2) / p(f_1) \quad (4)$$

在后面对 $p(f_2 | f_1)$ 进行精确分析时, $p(f_2)$ 和 $p(f_2) / p(f_1)$ 用于对比。

2 条件概率分析

在第1次传输失败的前提条件下,噪声 n' 的分布与发射信号 x 和接收端的合并方式相关,因此需结合发射信号形式与合并算法进行分析。从二进制相移键控(BPSK)调制和常用的最大比合并算法入手,分析合并后的条件错误概率。

2.1 单个符号

第1次传输发生错误的概率为:

$$p(f_1)_1 = Q(h_1 / \sigma) \quad (5)$$

两次传输都发生错误的情况为:

$$(f_1, f_2)_1 : \begin{cases} x = 1 & \frac{n_1}{h_1} < -1, n' < -1 \\ x = -1 & \frac{n_1}{h_1} > 1, n' > 1 \end{cases} \quad (6)$$

对应的概率为:

$$p(f_1, f_2)_1 = \iint_{s > h_1, \frac{h_1 s + h_2 t}{h_1^2 + h_2^2} > 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} ds dt = Q\left(\frac{h_1}{\sigma}\right) Q\left(\frac{h_2}{\sigma}\right) + \int_{-\infty}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} Q\left(\frac{h_1^2 + h_2^2 - h_2 t}{h_1 \sigma}\right) dt \quad (7)$$

作为对比,若假设 f_1 和 f_2 独立,则两次传输都发生错误的概率为:

$$p(f_1)_1 p(f_2)_1 = Q(h_1 / \sigma) Q\left[\sqrt{(h_1^2 + h_2^2) / \sigma^2}\right] \quad (8)$$

显然,式(7)的结果大于式(8)。

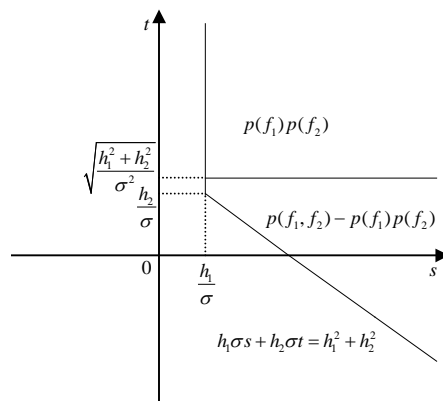


图1 (f_1, f_2) 积分区间比较

如图1所示,若按照传统分析方法使用式(8)计算联合概率,则积分区间为直线 $s = h_1 / \sigma$ 和 $t = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} / \sigma$ 围成的右上半开矩形区域。而正确的联合概率计算应为式(7)所示,积分区间为直线 $s = h_1 / \sigma$ 和 $h_1 \sigma s + h_2 \sigma t = h_1^2 + h_2^2$ 围成的右上半开区域。从图中可以看出两个区域的从属关系。直线 $s = h_1 / \sigma$ 和 $h_1 \sigma s + h_2 \sigma t = h_1^2 + h_2^2$ 将整个二维平面分

为4个部分, 右上部分区域即对应两次传输都发生错误的情况。类似可以求出其他3种情况发生的概率, 其中相对的两次传输都正确的概率在后面多个符号的分析时需要使用:

$$p(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_1 = p(f_1, f_2)_1 + p(\bar{f}_2)_1 - p(f_1)_1 \quad (9)$$

2.2 多个符号

考虑长度为 N 个符号的未编码数据包, 第1次传输失败的概率为:

$$p(f_1)_N = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{h_1}{\sigma}\right) \right]^N \quad (10)$$

两次传输都失败的概率为:

$$p(f_1, f_2)_N = p(f_1)_N - p(\bar{f}_2)_N + p(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_N = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{h_1}{\sigma}\right) \right]^N - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{\sigma^2}}\right) \right]^N + p(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_1^N \quad (11)$$

固定信道增益为 $h_1=1, h_2=1$ 时, 3种数据包长度下的条件错误概率及基于蒙特卡罗仿真(MC)的结果比较如图2所示。图2中, 根据式(5)、(7)、(10)、(11)计算所得到的条件概率 $p(f_2|f_1)$ 与蒙特卡罗仿真结果基本一致, 因此在后面的比较中只给出公式计算所得 $p(f_2|f_1)$ 作为基准。传统分析方法做出的错误概率估计 $p(f_1)$ 比 $p(f_2|f_1)$ 小, 而文献[9]中提出的估计方法 $p(f_2)/p(f_1)$ 则偏大。单个符号时, $p(f_2)$ 远小于 $p(f_2|f_1)$, 在0.1左右差距约有6 dB, 而 $p(f_2)/p(f_1)$ 则大了1 dB以上。随着 N 的增加, 三者的差距逐渐变小。当信噪比趋近无穷时, 不同长度的错误概率曲线逐渐重合, 但三者的极限并不一致。

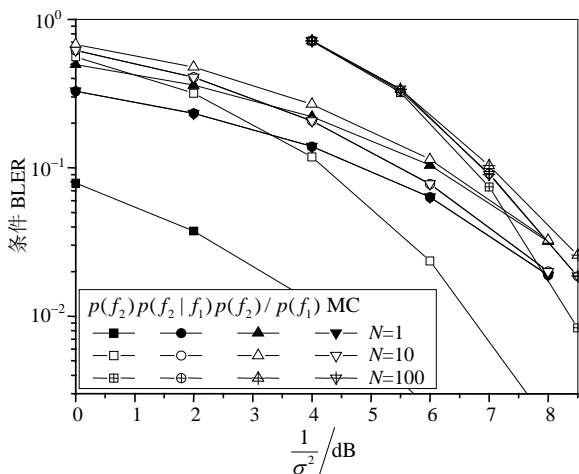


图2 固定信道增益 $h_1=1, h_2=1$ 时, $p(f_2)$ 、 $p(f_2|f_1)$ 、 $p(f_2)/p(f_1)$ 与MC仿真结果的比较

3 简化近似表达

定义式(7)中的第2项为:

$$I_Q(h_1, h_2, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} Q\left(\frac{h_1^2 + h_2^2 - h_2 t}{h_1 \sigma}\right) dt \quad (12)$$

由于其没有闭合表达式, 只能使用数值积分的方法计算, 不利于进一步的理论分析和应用, 因此有必要寻找简单的近似表达式代替。文献[10]中给出了两种 Q 函数的上界表达式:

$$Q(\sqrt{\gamma}) \leq e^{-\frac{\gamma}{2}}, Q(\sqrt{\gamma}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{2}} \quad (13)$$

前者过于松散, 与真实值始终存在距离; 而后者在 γ 较大时比较准确, 较小时则差距较大, 因此本文采用下式作为信噪比较大时 Q 函数的近似:

$$Q(\sqrt{\gamma}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2}} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12), 使用指数函数替换 Q 函数有:

$$I_Q(h_1, h_2, \sigma^2) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_1^2 + h_2^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}} \quad (15)$$

再反过来用 Q 函数替换式(15)中指数函数的一部分:

$$I_Q(h_1, h_2, \sigma^2) \approx Q\left(\frac{h_1}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{h_2^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}} \quad (16)$$

近似表达式的推导过程中先放大后缩小, 在多数情况下仍表现为上界, 且误差很小, 后面的数值结果可以证明这一点。

将式(16)带入式(7), 并与式(5)计算比值有:

$$p(f_2|f_1)_1 \approx Q\left(\frac{h_2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{h_2^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}} \quad (17)$$

此外, 若直接使用式(11)和式(10)的比值计算条件误块率(BLER), 由于计算机表示精度的问题, 信噪比较大时不能精确表达。因此, 需要化简以适应计算机的数值表示。利用多项式分解公式:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad (18)$$

定义函数:

$$g_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} x^i \quad (19)$$

条件BLER可以表示为:

$$p(f_2|f_1)_N = 1 + a \frac{\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{\sigma^2}}\right) \right]}{g_N[1 - Q(h_1/\sigma)]}$$

$$\frac{bg_N[p(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_1]}{g_N[1-Q(h_1/\sigma)]} \quad (20)$$

其中

$$a = \frac{Q\left[\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)/\sigma^2}\right]}{Q(h_1/\sigma)} \quad (21)$$

$$b = 1 - Q(h_2/\sigma) + \frac{Q\left[\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)/\sigma^2}\right]}{Q(h_1/\sigma)} - \frac{I_Q(h_1, h_2, \sigma^2)}{Q(h_1/\sigma)} \quad (22)$$

相比于直接计算式(11)和式(10)的比值,使用式(20)能更有效地利用计算机表示精度。以Matlab 6.5为例,直接计算比值,结果的有效范围大约在 10^{-8} 之前;而使用式(20)进行计算,其有效范围可扩展至 10^{-15} 。当 γ_1 较大时,还可以使用式(20)的极限进行替代:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} p(f_2 | f_1)_N = Q(h_2/\sigma) + \frac{I_Q(h_1, h_2, \sigma^2)}{Q(h_1/\sigma)} \quad (23)$$

从式(23)可以看出, N 固定时,条件BLER在 γ_1 趋近无穷时趋近单个符号时的结果。将式(16)带入式(20)和式(23),可以得到进一步的简化表达式。

4 数值结果

图3比较了3种典型信道假设时(重传时信道不变、重传时信道变差、重传时信道变好)条件BLER的真实值和近似表达式,文献[9]中给出的方法也在图中给出了比较。使用近似表达式的结果用 $p_{ap}(f_2 | f_1)$ 表示。图3中近似表达式在3种信道假设下都十分接近真实值,可以方便地应用于HARQ及其他类似技术的分析。 $p(f_2)/p(f_1)$ 的估计误差与两次传输的信道增益的相对大小有关。 $h_1 = 1, h_2^2 = 10$ 时, $p(\bar{f}_1, f_2) \ll p(f_1, f_2)$,因此3条曲线重合在一起; $h_1^2 = 10, h_2 = 1$ 时, $p(f_2)/p(f_1)$ 的估计误差最大。

图4比较了信道服从瑞利分布,重传时信道不变和独立两种极端情况下, BLER表达式的统计平均。重传时若信道不变(图中实心符号标记),3种表达式的统计平均几乎没有差别,该结论与图2的结果相符,三者的绝对差很小。若重传时信道与第1次传输的信道完全独立,传统分析结果 $E[p(f_2)]$ 曲线的斜率远大于其他曲线。此时的 $E[p_{ap}(f_2 | f_1)]$ 曲线(空心方形符号标记)几乎与重传信道不变时的曲线(实心方形符号标记)平行。当重传以第1次传输失败为条件时,若重传时信道不变,传统分析结论中所谓的

3 dB增益基本准确。但是,若重传时信道与第1次传输完全独立,能获得的分集增益比想象中小。

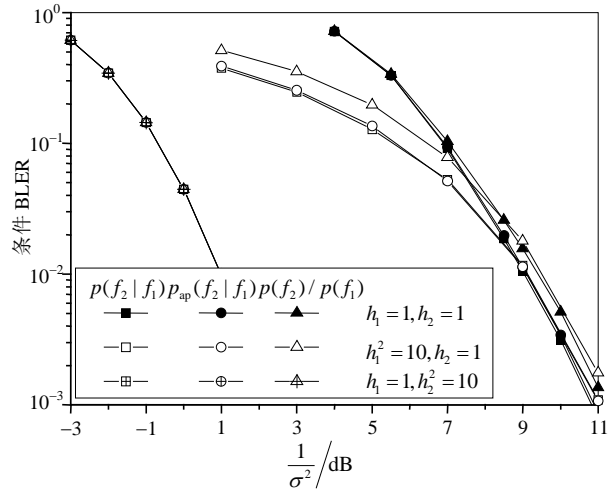


图3 $N = 100$, 3种信道下条件 BLER 的比较

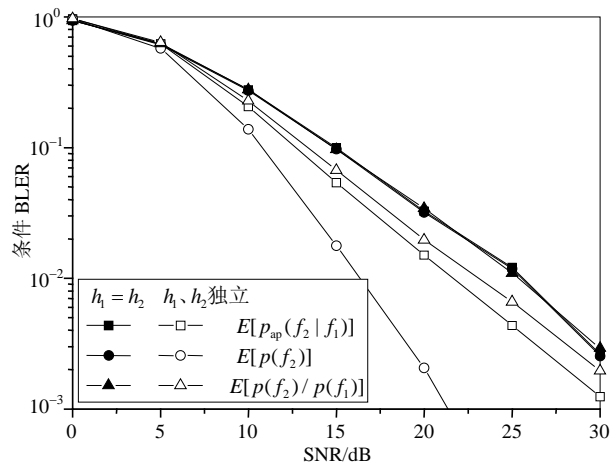


图4 瑞利信道, $N=100$ 重传时信道不变和重传信道独立下条件 BLER 的比较

5 结论

本文指出了传统HARQ分析方法的前提假设错误,声明合并后的噪声已非零均值高斯分布,且与发射信号相关,因此前若干次传输错误这个前提是不能被随意忽略的,尤其在重传时信道发生变化的情况。本文精确分析了具体发射信号形式下最大比合并后的条件错误概率,并利用指数函数与 Q 函数的互换,给出了条件错误概率的近似表达式,方便分析应用。

未来的研究中需要对其他调制方式、其他重传合并方式进行分析,并将结果推广至存在信道编码的情况,通过分析条件成对错误概率进而得到条件BLER的上界表达式。

(下转第49页)

接收机伪距测量误差, 并且随着信噪比的增加, 伪距测量误差将进一步降低。因此本方法可以有效地抑制短延时多径干扰, 提高了定位精度。

参 考 文 献

- [1] CAO Yi-chao. Target localization based on angle of arrivals[J]. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2007, 5(2): 172-174.
- [2] BETZ J W. Binary offset carrier modulations for radionavigation[J]. Journal of the Institute of Navigation, 2002, Winter: 227-246.
- [3] HEIN G W, IRSIGLER M, RODRIGUEZ J A A, et al. Performance of Galileo L1 signal candidates[C]//Proceedings of Europe Navigation Conference GNSS. Rotterdam, Netherlands: [s.n.], 2004
- [4] DIERENDONCK A. GNSS user assessment of the plans and benefits of GNSS modernized signals and services[C]//ION AM-2005. Cambridge, MA: [s.n.], 2005.
- [5] HAMIL A R, LOHAN S, RENFORS M. Nonlinear operator for multipath channel estimation in GPS receivers[C]//The 7th IEEE International Conference on Electronic, Circuits & Systems. Jounie Lebanon: IEEE Press, 2000: 352-356.
- [6] TOWNSEND B, WIEBE J, JAKAB A. Results and analysis of using the MEDLL receiver as a multipath meter[C]//ION National Technical Meeting. Anaheim, CA: [s.n.], 2000.
- [7] European Space Agency/Galileo Joint Undertaking. Signal in space interface control document Draft 0 (OS SIS ICD/D.0)[s]. 2006.
- [8] GRANDKE T. Interpolation algorithms for discrete fourier transform of weighed signals[J]. IEEE Trans on Instrum Meas, 1983, 32: 350-355.
- [9] PROAKIS J. Digital communications[M]. 4th ed. Boston: McGraw Hill, 2001.
- [10] BOEHM B, ABTS C, CHULANI S. Software development cost estimation approaches — A survey[J]. Annals of Software Engineering, 2000, 10: 177-205.
- [11] CHEN G L, WANG X F, ZHUANG Z Q. Genetic algorithm and its application[M]. Beijing: People's Post and Telecommunications Press, 1996.

编辑 税 红

(上接第44页)

参 考 文 献

- [1] 3GPP. 3GPP TS 36.300 V8.3.0 Overall description[J/OL]. [2007-12-31]. <http://www.3gpp.org/ftp/>.
- [2] 堵久辉, 陈书平, 王文博. TDD-HSDPA系统AMC与HARQ融合机制[J]. 北京邮电大学学报, 2006, 29(6): 120-124.
DU Jiu-hui, CHEN Shu-ping, WANG Wen-bo. A novel integration mechanism of AMC and HARQ in TDD-HSDPA Systems[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2006, 29(6): 120-124.
- [3] CHENG Jung-fu. Coding performance of hybrid ARQ schemes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2006, 54(6): 1017-1029.
- [4] FRENGER P, PARKVALL S, DAHLMAN E. Performance comparison of HARQ with Chase combining and incremental redundancy for HSDPA[C]//IEEE VTC 2001 Fall. Atlantic, USA: IEEE Press, 2001: 1829-1833.
- [5] IEEE 802. 16m Evaluation Methodology Drafting Group. Draft IEEE 802. 16m Evaluation Methodology Document [J/OL]. [2007-08-28]. <http://ieee802.org/16>.
- [6] Motorola. R1-050718 EESM link error prediction for EUTRA system evaluation. [J/OL]. [2008-08-29]. <http://www.3gpp.org/ftp/>.
- [7] LANEMAN J N, TSE D N C, WORNELL G W. Cooperative diversity in wireless networks: efficient protocols and outage behavior[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(12): 3062-3080.
- [8] TARASAK P, MINN H, LEE Y H. Analysis of incremental relaying protocol with RCPC in cooperative diversity systems[C]//IEEE VTC-2005-Fall. Dallas, Texas, USA: IEEE Press, 2005: 2537-2541.
- [9] GU Jian, ZHANG Yi, Yang Da-cheng. Modeling conditional FER for hybrid ARQ[J]. IEEE Communications Letters, 2006, 10(5): 384-386.
- [10] PROAKIS J G. Digital communications[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 2001.

编辑 张 俊