

多维奇偶校验乘积码性能分析

黄英, 雷菁

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

【摘要】相对于Turbo码,乘积码在高码率情况下具有性能优势,且无错误平层,其应用广泛。以奇偶校验码为分量码的乘积码译码算法简单,可适应不同的数据大小要求。通过分析多维奇偶校验乘积码的码多样性,得出高信噪比下该码的性能公式;计算机仿真表明:该性能公式结果与最大似然译码算法及迭代译码算法性能相符。通过分析码率、维数、分量码码长等参数对码性能的影响,得出码率、维数相同时,码性能相近;码率相同、维数不同时,高维乘积码具有性能优势。该结果为码参数选择提供依据,可在相同的信息传输有效性下,选择性能更好的码。

关键词 码率; 维数; 奇偶校验码; 乘积码; 标准一致界

中图分类号 TN911

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.02.013

Performance Analysis of Multidimensional Parity Check Product Codes

HUANG Ying and LEI Jing

(Institute of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology Changsha 410073)

Abstract Different from Turbo codes, product codes have no error floor problem and have better performance at high rate. In the recent year, product codes are widely used. Parity check product codes, which have the simpler decoding algorithm, can adapt to different required data length. Its performance formula is proposed after analyzing the code multiplicity and information multiplicity. Computer simulations show that the performance of the formula is the same as that of maximum likelihood(ML) decoding algorithm and iterative decoding algorithm. Performance analysis, which is based on different parameters such as code rate, dimension, and code length, shows that multidimensional parity check product codes have close performance at same code rate and dimension, and the codes with higher dimension can get better performance at same code rate.

Key words code rate; dimension; parity check codes; product codes; union bound

在纠错编码研究中, Turbo码和LDPC码是近些年的热点,它们均采用迭代译码算法,使得性能接近香农限的程度。在高码率情况下,乘积码具有一定的优势。文献[1]采用复杂度低的基于Chase算法的迭代译码算法,取得了逼近香农限的性能。相比于Turbo码,乘积码在译码算法、错误平层等方面都具有优势,如今已被IEEE局域网和城域网标准802.16协议采用。

乘积码一般采用二维编码,若在维数上进行扩展,可得到多维乘积码。由于在不同维数上都进行校验,其性能较好。奇偶校验码是一种较为简单的检错码,采用它作为多维乘积码的分量码可以自由组成不同的码率以满足所需;而且其分量码译码算法较为简单^[2-5],容易实现。

本文基于最小汉明距离和码的多样性,对多维奇偶校验乘积码的性能进行分析,解决了高信噪比、

低误码率情况下的仿真耗时问题,并对多维奇偶校验乘积码在分量码码长、维数等参数选择等方面提供了一定的参考意见。

1 多维乘积码构造

乘积码用两个或两个以上的分组码构造较长的码,从而提高码的性能。多维乘积码编码结构如图1所示。以二维乘积码为例,假设有两个线性分组码分别为 $C_1(n_1, k_1, d_1)$ 和 $C_2(n_2, k_2, d_2)$,其中,参数 n_i 、 k_i 、 d_i ($i=1,2$)分别代表码长、信息位长、最小汉明距离。信息位以 $k_1 \times k_2$ 的形式放入行列阵列中,先用码 $C_2(n_2, k_2, d_2)$ 对每行进行编码(共 k_1 行),再用码 $C_1(n_1, k_1, d_1)$ 对每列进行编码(共 n_2 列),如图1a所示。此二维乘积码可写成 $(n_1, k_1, d_1) \times (n_2, k_2, d_2)$,其码率为 $(k_1 \times k_2) / (n_1 \times n_2)$ 。同样的方法可构造三维立体乘积码,如图1b所示。首先构造 k_3 个二维乘积码

收稿日期: 2008-08-29; 修回日期: 2009-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(60572176)

作者简介: 黄英(1978-),女,博士生,主要从事信道编码、调制识别等方面的研究。

$(n_1, k_1, d_1) \times (n_2, k_2, d_2)$; 然后在Z方向上进行 $C_3(n_3, k_3, d_3)$ 线性分组编码, 构成三维立体乘积码 $(n_1, k_1, d_1) \times (n_2, k_2, d_2) \times (n_3, k_3, d_3)$ 。其他多维乘积码也以类似的步骤构造。对于多维乘积码(假设为 m 维, $m \geq 2$), 其最小距离和码率分别为:

$$d = d_1 \times d_2 \times d_3 \cdots \times d_m \quad (1)$$

$$R = \frac{k_1}{n_1} \times \frac{k_2}{n_2} \times \frac{k_3}{n_3} \cdots \times \frac{k_m}{n_m} \quad (2)$$

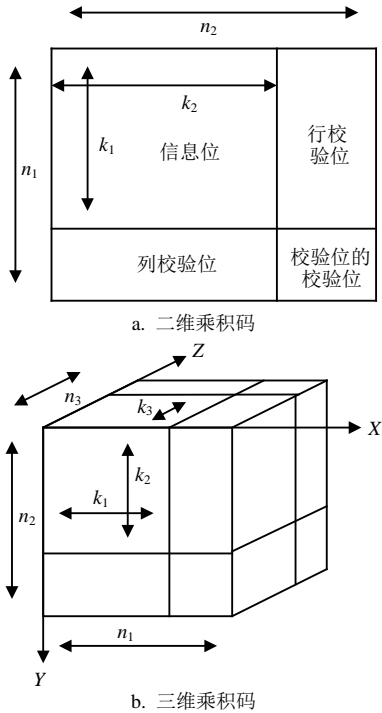


图1 多维乘积码编码结构图

分量码一般采用扩展汉明码^[1]、奇偶校验码^[2-4], 尤其是后者, 译码过程相对简单, 并可以达到不错的性能。对于奇偶校验乘积码, $k_i = n_i - 1, d_i = 2$ 。每增加一维, 最小距离则提高一倍, 码率降低为原来的 $(n-1)/n$, 当在 n 较大时, 码率的降低可以忽略。由此可以看出, 多维奇偶校验乘积码在性能和码率上均有优势。

2 性能分析

对一种编码进行性能分析和评价, 一般有计算机仿真与标准一致界(union bound)两种方法。多维奇偶校验乘积码的性能, 一般是通过Monta Carlo仿真得到的^[2-4]。但随着维数的增加, 数据块增大, 在高信噪比情况下, 仿真需要大量数据, 并且耗费很长的时间。近年来, 重要性抽样(importance sampling, IS)的方法也应用于码的性能仿真^[6-8], 在一定程度上解决了上述问题, 但该方法的有效性存在两个制约:

- (1) 在译码算法偏离最佳译码较远时, 对于错误区域估计不准, 将降低IS技术的有效性;
- (2) 如果无法找

到离发送码字具有最小汉明距离的码字, 就无法找到有效的错误中心集合, IS的有效性同样受到影响。鉴于此, 将利用标准一致界分析和评估多维奇偶校验乘积码的性能。

2.1 标准一致界

对于一线性分组码 $C(n, k, d)$, 通过BPSK调制, 在AWGN信道上其一致界如下^[9-10]:

$$FER \leq \sum_{i=d}^n \frac{1}{2} A_i \operatorname{erfc} \left(\sqrt{i \frac{k E_b}{n N_0}} \right)$$

$$BER \leq \sum_{i=d}^n \frac{1}{2} \frac{w_i}{k} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{i \frac{k E_b}{n N_0}} \right) \quad (3)$$

式中 A_i 为码集中重量为 i 的码字数目; w_i 为 A_i 个重量为 i 的码字中信息位部分重量之和。在信噪比较高的情况下, 标准一致界可完全由最小距离项确定, 即 A_{\min} 和 w_{\min} 。在高信噪比下, 有:

$$FER \approx \frac{1}{2} A_{\min} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{d \frac{k E_b}{n N_0}} \right)$$

$$BER \approx \frac{1}{2} \frac{w_{\min}}{k} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{d \frac{k E_b}{n N_0}} \right) \quad (4)$$

2.2 多维奇偶校验乘积码多样性分析

2.2.1 $(n, n-1)$ 奇偶校验码

文献[9]对扩展汉明码的情况进行了详细分析。对于奇偶校验码 $(n, n-1)$, 码重为偶数, 设为 $2i (i \in \mathbb{Z})$ 。重量为 $2i$ 的码字分两种情况, 一种是前 $n-1$ 位就满足该偶数重量; 另一种是前 $n-1$ 位重量为 $2i-1$, 校验位为 1, 整个 n 位重量满足 $2i$ 。每个码集中均有一个全零码字, 但只有码长 n 为偶数时才有全 1 码字。由此分析得 $(n, n-1)$ 奇偶校验码的多样性表示:

$$A_{2i} = \begin{cases} C_{n-1}^{2i} + C_{n-1}^{2i-1} & 1 \leq i < \frac{n}{2} \\ 1 & i = 0 \\ 1 & i = \frac{n}{2}, n \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (5)$$

对于 $(3, 2)$ 码, 只有 0 和 2 两个重量, 其中 $A_0 = 1, A_2 = 3$, 共 4 个合法码字, 无全 1 码字; 而对于 $(6, 5)$ 码, 有 0、2、4、6 种重量, 其中 $A_0 = 1, A_2 = 1, A_4 = 15$, 共 32 个合法码字, 含有全 1 码字。

二进制的奇偶校验码 $(n, n-1)$ 具有传递性自同构特性, 满足公式:

$$w_i = \frac{k A_i}{n} i (\forall i) \quad (6)$$

对于 $(3, 2)$ 码, $w_0 = 0, w_2 = 4$; 对于 $(6, 5)$ 码, $w_0 = 0, w_2 = 5, w_4 = 25, w_6 = 50$ 。

本文利用式(3)、式(5)~式(6)就可以较好地分析

奇偶校验码 $(n,n-1)$ 的性能。但随着 n 的增加,式(3)中累加的项增多。在高信噪比情况下,性能主要由 w_2 决定。根据式(5)、式(6)可得:

$$w_{\min} = w_2 = \frac{2kn(n-1)}{2n} = k(n-1) = (n-1)^2 \quad (7)$$

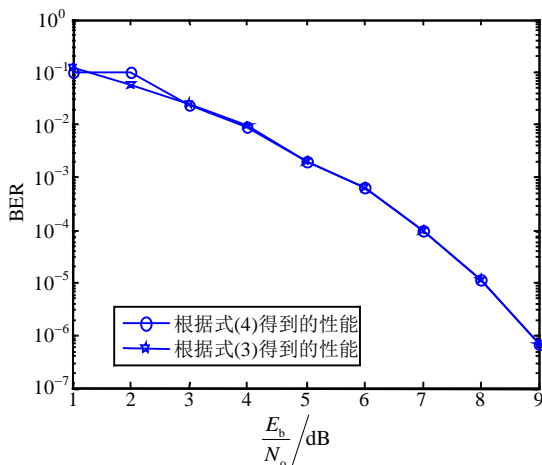


图2 奇偶校验码(6,5)的性能比较

图2为奇偶校验码(6,5)的性能比较。从图2可看出,对于奇偶校验码(6,5),在比特信噪比大于3 dB时, w_{\min} 一项就可以较好地反映码的性能,也进一步简化了累加公式。

2.2.2 多维乘积码多样性分析

乘积码是串联的一种特殊形式,通过迭代译码^[1-2]可达到较好的性能。对于乘积码的多样性,满足乘积定律,即对于二维奇偶校验乘积码 $C_1(n_1,n_1-1,2) \times C_2(n_2,n_2-1,2)$ 有 $A_{\min} = A_4 = A_2^1 \times A_2^2$ 。

根据式(6)可得 $w_{\min} = w_4 = w_2^1 \times w_2^2$,由此,二维奇偶校验乘积码为 $w_{\min} = w_4 = (n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2$ 。

依次类推,对于三维奇偶校验乘积码 $C_1(n_1,n_1-1,2) \times C_2(n_2,n_2-1,2) \times C_3(n_3,n_3-1,2)$ 有 $w_{\min} = w_8 = (n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2 (n_3 - 1)^2$;对于 m 维奇偶校验乘积码有 $w_{\min} = w_{2^m} = (n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2 \dots (n_m - 1)^2$

2.3 性能仿真分析

根据以上的数学分析,二维奇偶校验乘积码 $(3,2)^2$ 的性能比较如图3所示。采用最大似然(ML)方法的译码性能与其标准一致界完全重合,也充分说明标准一致界的正确性。但随着码长的增加,进行ML译码所需时间呈指数增长。尤其是多维的乘积码,码长随着维数的增加而增加。因此,可采用文献[2]中针对奇偶校验乘积码的迭代译码方法,随着迭代次数的增加,性能逐渐接近于ML译码性能。

从图3中可以看出迭代算法在第4次迭代时就可接近ML译码性能。由于性能良好,以及其相对于

ML译码在译码时间上的优势,迭代译码方法备受关注。Turbo码、LDPC码都采用迭代译码算法,性能接近于香农限。

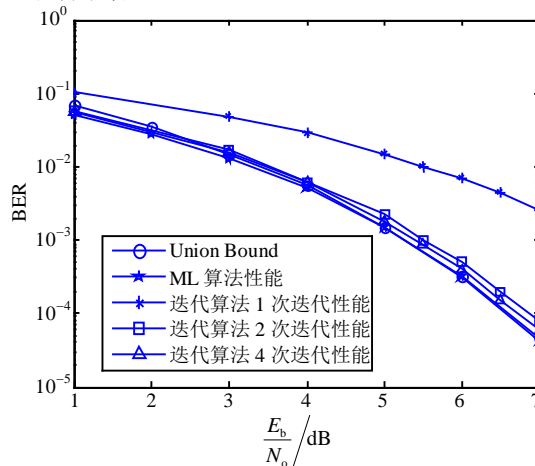
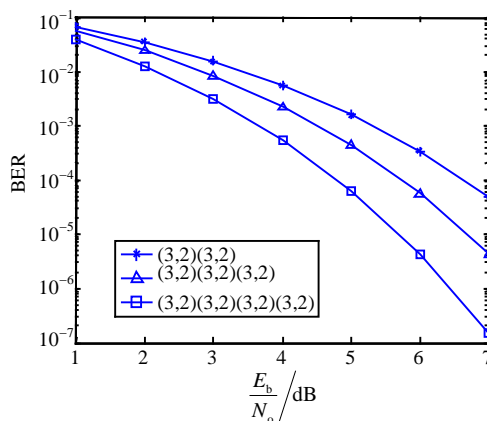


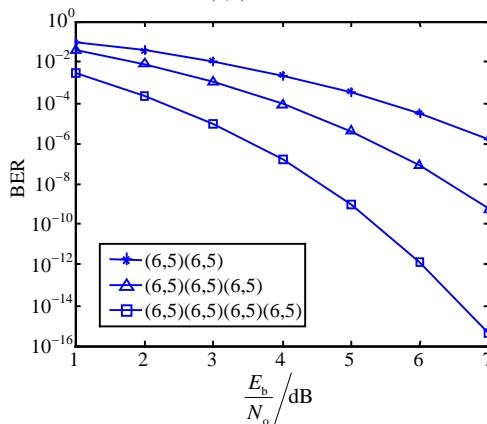
图3 二维奇偶校验乘积码(3,2)²性能比较

对于高维乘积码,随着译码复杂性增加,可以借助标准一致界对其性能进行分析,从而为选择具体码长和维数提供参考。

2.3.1 同分量码码长、不同维数的奇偶校验乘积码



a. 分量码为(3,2)的多维奇偶校验乘积码



b. 分量码为(6,5)的多维奇偶校验乘积码

图4 同分量码码长、不同维数的奇偶校验乘积码性能比较

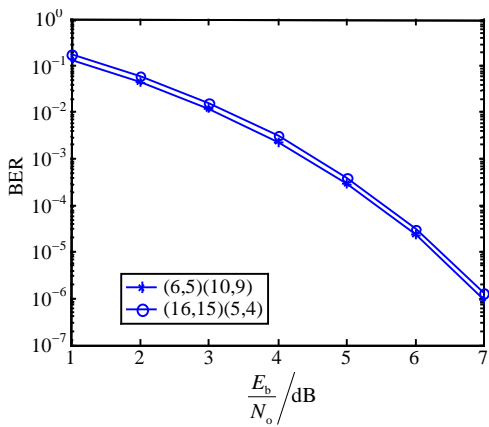
图4为同分量码码长、不同维数的奇偶校验乘积

码性能比较。从图4来看,当分量码码长相同时,奇偶校验乘积码的维数不同,性能是不同的。随着维数的增加,性能会有一些提高,这是由于乘积码在不同的方向上都加入了校验成分,冗余增加的结果。维数的增加,也带来了码率的降低。对于分量码为(3,2)的多维奇偶校验乘积码,维数从2到4,相应的码率从0.44到0.29,再到0.19。码率降低,信息传输有效性降低,用降低码率来提高性能,这是需要慎重考虑的。

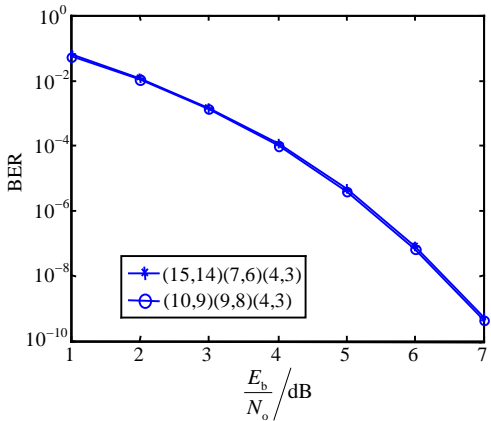
2.3.2 分量码码长不同、维数和码率相同的奇偶校验乘积码

当维数和码率相同,但分量码码长不同时,从式(4)、式(8)分析可知,误差补函数erfc()内部参数相同,而系数为:

$$(n_1 - 1)^2(n_2 - 1)^2 \cdots (n_m - 1)^2 / 2k_1k_2 \cdots k_m = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdots (n_m - 1) = \frac{1}{2}k_1k_2 \cdots k_m$$



a. 码率为0.75, 二维奇偶校验乘积码性能比较



b. 码率为0.6, 三维奇偶校验乘积码性能比较

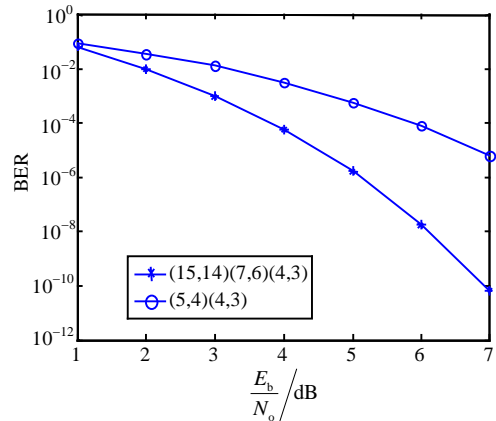
图5 码率、维数相同的奇偶校验乘积码性能比较

由于性能主要是由误差补函数erfc()确定,在这种情况下,这类码型性能相当,而信息位较小者有略微的性能优势。图5为码率、维数相同的奇偶校验乘积码性能比较。从图5可以看出,码率、维数相同

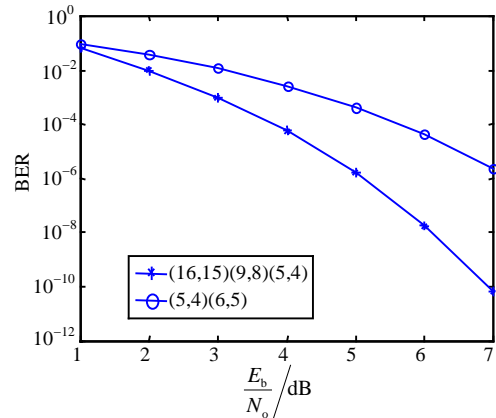
时,信息位较小的码在性能上的优势很小,当BER=10⁻⁵时,优势不到0.1 dB,说明这种优势与信息位数有关。

2.3.3 分量码码长、维数不同,码率相同的奇偶校验乘积码

对于码率相同,维数不同的奇偶校验乘积码,从上面的分析可知,维数较高者具有较大的最小汉明距离,即在erfc函数中变量值较大,从而整体性能较高。图6为码率相同、维数不同的奇偶校验乘积码性能比较。从图6中可以看出,误码率为10⁻⁵,相同码率下,三维奇偶校验乘积码相比于二维奇偶校验乘积码,性能优势约为2 dB。在这种情况下,尽量选择较高维数的码,可在相同的信息传输效率下得到更好的性能。



a. 码率为0.6, 不同维数的奇偶校验乘积码性能比较



b. 码率为2/3, 不同维数的奇偶校验乘积码性能比较

图6 码率相同、维数不同的奇偶校验乘积码性能比较

3 结束语

本文分析了多维奇偶校验乘积码的多样性A_i和w_i,结合标准一致界(union bound),得到其性能公式,该结果与迭代译码算法^[2]的结果相吻合。多维奇偶校验乘积码的性能与分量码码长、码率、维数相关;在各分量码码长相同时,维数的增加会提高性能,

但随之也降低了码率；当码率、维数相同时，选择不同码长所达到的性能相近；当码率相同，维数不同时，选择较高维数的乘积码，可以在相同的信息传输有效性的情况下，达到较好的性能。当然，维数的增加，会提高实际应用中的译码复杂性。但对于奇偶校验码，本身译码复杂性低，而且随着硬件水平的逐步提高，运算速度的加快，译码复杂性不再是制约。

参 考 文 献

- [1] PYNDIAH R M. Near-optimum decoding of product codes: block Turbo codes[J]. IEEE Trans on Comm, 1998, 46(8): 1003-1010.
- [2] JANVARS T, FARKAS P. On decoding of multidimensional single parity Turbo product codes[C]//IEEE Mobile Future and Symposium on Trends in Communications. [S.l.]: IEEE, 2003.
- [3] HAGENAUER J, OFFER E, PAPKE L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42: 429-445.
- [4] 黄 英, 徐小红, 雷 菁. 无线通信中增强型Turbo乘积码的研究[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2007, 19(6): 11-13.
- HUANG Ying, XU Xiao-hong, LEI Jing. Research on iterative decoding of enhanced Turbo product codes in wireless communication[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science), 2007, 19(6): 11-13.
- [5] 赵超群, 黄 英, 雷 菁. 软输入/软输出迭代译码算法的研究与设计[J]. 电视技术, 2006, 294(10): 15-17.
- ZHAO Chao-qun, HUANG Ying, LEI Jing. Research and design of soft-in-soft-out iterative decoding algorithm [J]. Digital TV & Digital Video, 2006, 294(10): 15-17.
- [6] FERRARI M, BELLINI S. Importance sampling simulation of concatenated block codes[J]. IEE Proc Commun, 2000, 147(5): 245-251.
- [7] FERRARI M, BELLINI S. Importance sampling simulation of turbo product codes[J]. IEEE ICC, 2001, 9: 2773-2777.
- [8] SRINIVASAN R, WANG N. Fast performance estimation of block codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2008, 56(3): 369-377.
- [9] CHIARALUCE F, GARELLO R. Extended hamming product codes analytical performance evaluation for low error rate applications[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2004, 3(6): 2353-2361.
- [10] CHIARALUCE F, CARELLO R. Some new results on extended hamming product codes and punctured product codes[J]. IEEE VTC, 2004, 2: 1033-1037.

编辑 税 红

· 我校科研成果介绍 ·

小型全相参Ka波段频率综合器

该项目采用微波频段的DDS扩频锁相、毫米波倍频输出方案，解决了指标要求频带宽、步进小、相噪低、输出杂散低的难题；采用本振信号与射频载波混频，固定中频锁相，在国内首次解决了输出本振与射频在400 MHz范围内快速跳频200个点上相差恒定的难题；采用创新的多配置DDS扩频技术方案，既解决了输出杂散要求低的难题，又实现了快速跳频；采用多层布线、表面安装和高密度集成组装技术、实现了该频综组件的小型化。