

# 多维累加型交叉并联单奇偶校验码的性能分析

郭 凯, 陈彦辉, 李建东

(西安电子科技大学综合业务网理论与关键技术国家重点实验室 西安 710071)

**【摘要】**多维累加型交叉并联单奇偶校验(M-ACPC-SPC)码是一种新的纠错编码,该码具有较低的编、译码复杂度及较好的误比特率性能。推导了M-ACPC-SPC码的平均输入冗余重量枚举函数,由此提出了该码的误比特率性能上界及该码在高信噪比条件下误比特率的近似表达式,其近似结果与仿真值匹配良好。分析表明,随着交织长度及交织器数目的增加,M-ACPC-SPC码的错误平层逐渐降低,为M-ACPC-SPC码的设计提供了有效的参考依据。

**关键词** 误比特率; 交叉结构; 输入冗余重量枚举函数; 迭代译码; Turbo码

**中图分类号** TN911.22

**文献标识码** A

**doi:**10.3969/j.issn.1001-0548.2010.04.007

## Performance Analysis of M-ACPC-SPC Codes

GUO Kai, CHEN Yan-hui, and LI Jian-dong

(State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University Xi'an 710071)

**Abstract** Multiple accumulated-crossover parallel concatenated SPC (M-ACPC-SPC) codes is a class of novel error-correcting codes with low encoding/decoding complexity and good bit-error-rate (BER) performance. The average input-redundancy weight enumerating function (IRWEF) of M-ACPC-SPC codes is deduced to evaluate an upper BER bound of M-ACPC-SPC codes. An approximate formula of BER at high SNR is proposed for analyzing M-ACPC-SPC codes. Analysis show that the error floors of M-ACPC-SPC codes decrease as the growth of interleaver length and the number of interleavers.

**Key words** bit error rate; crossover structure; IRWEF; iterative decoding; Turbo codes

Turbo码<sup>[1]</sup>的提出与低密度奇偶校验(low density parity check, LDPC)码<sup>[2]</sup>的再发现,是信道纠错编码研究领域中的重要里程碑<sup>[3]</sup>。这两类码均具有可逼近香农限的性能,但它们的实际应用却往往滞后于已有的理论成果: Turbo码编码简单,但其译码复杂度较高;而LDPC码的译码复杂度较Turbo码大为降低,但其编码较为复杂<sup>[4]</sup>。因此,寻找具有较低编码和译码复杂度的纠错编码是当前一个研究热点。研究者陆续提出了非规则重复累加(IRA)码<sup>[5-6]</sup>、准循环LDPC码<sup>[7]</sup>以及多维并联单奇偶校验(multiple parallel concatenated SPC, M-PC-SPC)码<sup>[4]</sup>等结构。M-PC-SPC码是低密度生成矩阵(low density generator matrix, LDGM)码的一个特例<sup>[8]</sup>,其编码复杂度较低,可在分布式无线网络中得到较好的应用<sup>[9]</sup>。但M-PC-SPC码的错误平层较高<sup>[8]</sup>。本文在M-PC-SPC码的各个并行支路之间引入一种累加型交叉结构,提出了一类新的信道纠错码——多维累加型交叉并联单奇偶校验(M-ACPC-SPC)码,该码具有较低的编、译码复杂度。交织器数目及交织长度

是M-ACPC-SPC码的两个重要参数,为确定不同参数对该码性能的影响,本文对该码的误比特率性能进行了仿真及理论分析。

### 1 M-ACPC-SPC码的编译码结构

M-ACPC-SPC码的编码、译码结构如图1所示。其编码器包括 $M$ 个长为 $K$ 的交织器、一个累加型交叉器和 $M$ 个SPC编码器。信息比特序列 $U$ 分别由 $M$ 个交织器进行交织,输出交织比特序列 $U^m$  ( $m=1,2,\dots,M$ )。每一个交织比特序列分别进行串并变换,由一路串行比特流变为 $k$  ( $k \geq 2$ )路并行比特流,构成累加型交叉器的输入。累加型交叉器与 $M$ 个SPC编码器构成“核心编码器”(即图1虚线框内的结构)。若信息比特序列 $U$ 中包含 $K$ 个信息比特,则编码过程调用核心编码器的次数为 $L=K/k$ 。在传统并行级联码中,各个分量码编码器仅对一个交织比特序列进行编码,而交叉器的引入则使不同的交织比特序列产生新的联系:在每次核心编码器的编码操作中,交叉器的第 $(m-1)k+1$ 至第 $mk$ 个支路的输入比特(即来源于

收稿日期: 2008-12-11; 修回日期: 2009-05-13

基金项目: 国家863计划(2007AA01Z288); 国家杰出青年科学基金(60725105); 长江学者和创新团队发展计划和高等学校创新引智计划(B08038)

作者简介: 郭 凯(1982-),男,博士,主要从事信道编码及调制解调技术方面的研究。

$U^{\pi_m}$  的  $k$  个并行比特)将被“交叉”到第  $m, m+1, \dots, M$  个输出支路中;交叉器的第  $m$  个输出支路将输出  $mk$  个比特,对应的第  $m$  个 SPC 编码器(称为 SPC- $m$ )对该  $mk$  个比特进行模 2 加,输出一个校验比特。 $L$  次核心编码器操作结束后,第  $m$  个 SPC 编码器将输出第  $m$  个奇偶比特序列  $P_m(m=1,2,\dots,M)$ ,其长度为  $L$ 。最后, $U$  与  $P=[P_1 P_2 \dots P_M]$  构成输出码字  $C$ ,其长度为  $N=K+LM$ 。M-ACPC-SPC 码为系统码,其编码速率为  $R=K/(K+LM)=k/(k+M)$ 。

若不存在交叉器, M-ACPC-SPC 码即传统的 M-PC-SPC 码。M-ACPC-SPC 码的编码过程中所需模 2 加法操作的次数为  $[M(M+1)k/2-M]L=[M(M+1)/2-M/k]K$ 。 $M(M+1)/2-M/k$  的值与  $K$  无关,且通常远小于  $K$ ,因此 M-ACPC-SPC 码具有线性编码复杂度。

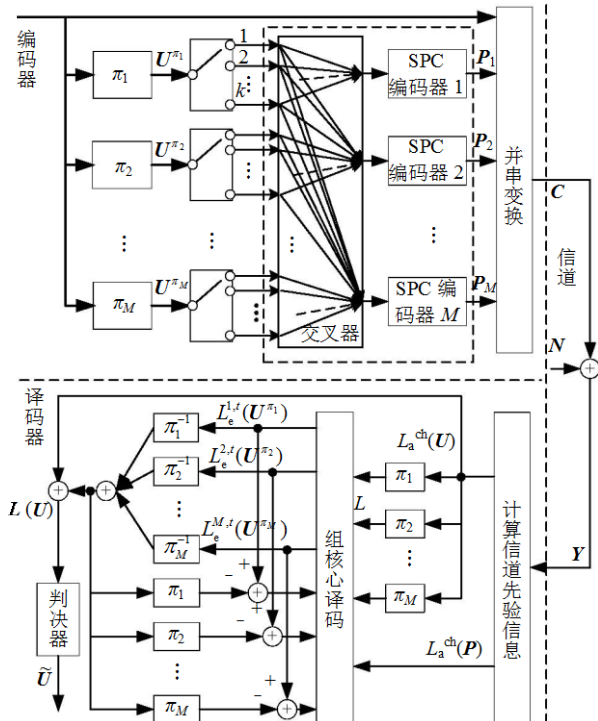


图1 M-ACPC-SPC码的编码、译码结构

M-ACPC-SPC 码的编码过程中需调用  $L$  次核心编码器,该过程可等效看作是  $L$  个核心编码器对  $M$  个交织比特序列的操作,故 M-ACPC-SPC 码可采用以下迭代方法进行译码:在每一轮迭代中,对  $L$  个核心编码器分别进行软输入软输出译码(称作  $L$  组核心译码),得到各个交织比特序列的外信息,然后在各个交织比特序列之间进行外信息交换,再开始下一轮迭代中的  $L$  组核心译码。其译码过程可简述如下。

(1) 计算所有信息比特的信道先验对数似然比(log-likelihood ratio, LLR),记为  $L_a^ch(U)$ ;计算码字中所有校验比特的信道先验 LLR,记为  $L_a^ch(P)$ ;  $L_a^ch(U)$  分别经过  $M$  个交织器,得到不同交织比特序

列的初始先验信息  $L_a^m(U^{\pi_m}), m=1,2,\dots,M$ 。

(2) 在第  $t$  次迭代中,进行  $L$  组核心译码,输出外信息  $L_e^{m,t}(U^{\pi_m}), m=1,2,\dots,M$ 。“核心编码器”可等效为一个参数为  $(M, k)$  的“之型码”,可以利用 Max-Log-APP 算法<sup>[10]</sup>实现局部译码,每组核心译码需完成  $(3Mk+4M)$  次加法等效操作。

(3) 第  $t$  次迭代结束后,计算下一次迭代中第  $m(m=1,2,\dots,M)$  个交织比特序列的新的先验 LLR:

$$L_a^{m,t+1}(U^{\pi_m}) = \pi_m \left[ \sum_{p=1, p \neq m}^M \pi_p^{-1} [L_e^{p,t}(U^{\pi_p})] \right] + L_a^m(U^{\pi_m}) \quad (1)$$

(4) 完成指定的  $T$  次迭代后,计算信息比特序列  $U$  的判决用 LLR 信息:

$$L(U) = \sum_{m=1}^M \pi_m^{-1} [L_e^{m,T}(U^{\pi_m})] + L_a^ch(U) \quad (2)$$

对  $L(U)$  进行硬判决,得到估计的信息分组  $\tilde{U}$ 。

对 M-ACPC-SPC 码在 BPSK 调制下的误比特率进行仿真,  $R=0.5, M=k=5$ , AWGN 信道,迭代 50 次。仿真结果如图 2 所示。

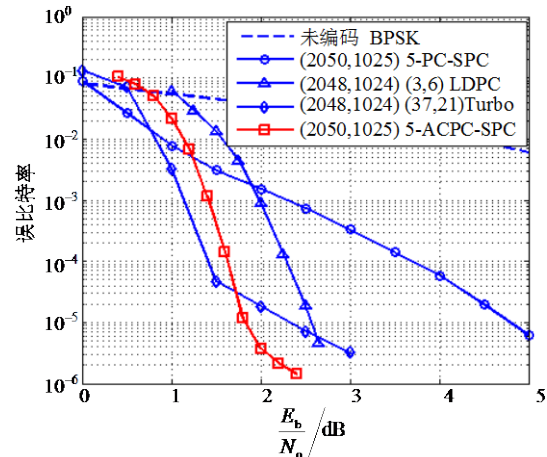


图2 M-ACPC-SPC码的误比特率仿真结果

图中, 5-ACPC-SPC 码 ( $M=5$ ) 的误码平层低于经典的 (37,21) Turbo 码<sup>[11]</sup>。当  $BER=10^{-5}$  时, 5-ACPC-SPC 码相对于 5-PC-SPC 码约有 3 dB 的增益, 相对于利用 PEG 方法<sup>[11]</sup>构建的 (3,6) LDPC 码约有 0.8 dB 的增益。在上述 5-ACPC-SPC 码的译码过程中, 平均每信息比特需完成加法等效操作的次数为  $50 \times (3Mk+4M)L/K=950$ ; 而迭代 20 次的 (37,21) Turbo 码则需  $20 \times 30 \times 16=9600$  次<sup>[10]</sup>加法等效操作。因此 5-ACPC-SPC 码的译码复杂度远低于 (37,21) Turbo 码。

## 2 M-ACPC-SPC码的性能分析

在高信噪比下, 为避免大数据量仿真, 将通过 IRWEF 得到其平均误比特率的联合上界, 由此给出 M-ACPC-SPC 码在高信噪比下的误比特率近似公式。

### 2.1 M-ACPC-SPC码的IRWEF

文献[12]提出了并行级联码条件重量枚举函数的计算方法: 先求出两个分量码的条件重量枚举函数, 再引入均匀交织器的概念, 即可求出并行级联码整体的条件重量枚举函数。该方法在文献[4]的被推广到具有多个 SPC 分量码的 M-PC-SPC 码中。但在 M-ACPC-SPC 码中, 由于交叉器的引入, 各个 SPC 分量码之间不再相互独立, 因此文献[4]的方法并不适用于计算 M-ACPC-SPC 码的 IRWEF。本文根据 M-ACPC-SPC 码的编码结构特点, 首先推导“核心编码器”的 IRWEF, 然后以此为基础计算 M-ACPC-SPC 码的平均 IRWEF。

定义 $[N,K]$ 系统分组码的IRWEF为:

$$A(W, Z) = \sum_{w=0}^K \sum_{z=0}^{N-K} A_{w,z} W^w Z^z = \sum_{w=0}^K W^w A_w(Z) \quad (3)$$

式中  $A_{w,z}$ 是码字集合中信息位重量为 $w$ 、校验位重量为 $z$ 的码字的个数;  $W$ 是与信息位重相关的变量, 具体含义可参见文献[12];  $A_w(Z)$ 为条件重量枚举函数。在“核心编码器”中, 第一个SPC编码器(SPC-1)的参数为 $(k+1,k)$ , 则SPC-1的IRWEF为:

$$A^1(W, Z) = \sum_{w=0}^K \sum_{z=0}^1 A_{w,z} W^w Z^z = \sum_{w=0}^K \binom{k}{w} W^w Z^{\text{mod}(w,2)} \quad (4)$$

式中  $\text{mod}(w,2)$ 表示对 $w$ 进行模2除。在M-ACPC-SPC码的“核心编码器”中, SPC-1的输入将被“交叉”到第2个SPC编码器(SPC-2)的输入中, 因此SPC-2的输出, 可等效看作参数为 $(k+1,k)$ 的SPC编码器的输出与SPC-1输出的奇偶校验比特求取模2和。由此得到SPC-1、SPC-2的联合IRWEF:

$$A^{1,2}(W_1, W_2, Z) = \sum_{w_1=0}^K \binom{k}{w_1} W_1^{w_1} Z^{\text{mod}(w_1,2)} \times \sum_{w_2=0}^K \binom{k}{w_2} W_2^{w_2} Z^{\text{mod}(w_2+\text{mod}(w_1,2),2)} = \sum_{w_1=0}^K \sum_{w_2=0}^K \binom{k}{w_1} \binom{k}{w_2} W_1^{w_1} W_2^{w_2} Z^{\text{mod}(w_1,2)+\text{mod}(w_1+w_2,2)} \quad (5)$$

在式(5)中, 用 $W_1$ 、 $W_2$ 区分来自不同交织比特序列的输入重量。以此类推, 可得到全部 $M$ 个SPC编码器(即“核心编码器”)的联合IRWEF:

$$A^{1,2,\dots,M}(W_1, W_2, \dots, W_M, Z) = \sum_{w_1=0}^K \sum_{w_2=0}^K \dots \sum_{w_M=0}^K \left[ \prod_{m=1}^M \binom{k}{w_m} W_m^{w_m} \right] \times Z^{\sum_{i=1}^M \text{mod}\left(\sum_{j=1}^i w_j, 2\right)} \quad (6)$$

假设 $M$ 个交织器全部为均匀交织器, 若给定第

一个交织比特序列的重量为 $w$ , 则对于其余 $M-1$ 个交织比特序列, 存在 $\binom{K}{w}^{M-1}$ 种等概的序列组合, 且 $M$ 个交织比特序列具有相同的重量 $w$ 。而在M-ACPC-SPC码的编码过程中, “核心编码器”被调用了 $L$ 次, 最后由式(6)得到M-ACPC-SPC码的平均IRWEF:

$$A^{M-AC}(W, Z) = \sum_{w=0}^K \sum_{z=0}^{N-K} A_{w,z}^{M-AC} W^w Z^z = \sum_{w=0}^K \sum_{z=0}^{N-K} \frac{f(w, z)}{\binom{K}{w}^{M-1}} W^w Z^z \quad (7)$$

$$f(w, z) = \text{coef}\{[A^{1,2,\dots,M}(W_1, W_2, \dots, W_M, Z)]^L, (W_1 W_2 \dots W_M)^w Z^z\} \quad (8)$$

式中  $\text{coef}(F(x, y), x^a y^b)$ 表示 $F(x, y)$ 中 $x^a y^b$ 的系数。

### 2.2 M-ACPC-SPC码的误比特率性能

应用联合界技术<sup>[12]</sup>, 由式(7)可得到M-ACPC-SPC码在高信噪比下采用最大似然, 译码时, 其误比特率联合上界的表达式为:

$$P_b \leq \frac{1}{2} \sum_{w=1}^K \frac{w}{K} \sum_{z=0}^{LM} \frac{f(w, z)}{\binom{K}{w}^{M-1}} \text{erfc}(\sqrt{(w+z)R(E_b/N_o)}) \quad (9)$$

式中  $R$ 为编码速率;  $E_b/N_o$ 为比特信噪比;  $\text{erfc}()$ 为互补误差函数。给定参数 $K$ 、 $k$ 、 $M$ 及信噪比后, 利用式(6)、式(8)、式(9)进行数值计算, 即得到M-ACPC-SPC码的误比特率性能上界。但随着分组长度 $K$ 及交织器个数 $M$ 的增加, 式(9)右边的项数逐渐增多, 利用式(6)、式(8)计算系数 $f(w, z)$ 的难度也逐渐加大。由于在高信噪比下, 误比特率主要由低重量的输入序列决定<sup>[10]</sup>, 综合计算复杂度及精度, 仅计算式(9)中 $w$ 为1、2的项, 由此给出M-ACPC-SPC码误比特率的近似公式为:

$$P_b \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{K} \times \sum_{z=1}^{M(M+1)/2} A_{1,z}^{M-AC} \times \text{erfc}(\sqrt{(1+z)R(E_b/N_o)}) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{K} \times \sum_{z=0}^{M(M+1)} A_{2,z}^{M-AC} \times \text{erfc}(\sqrt{(2+z)R(E_b/N_o)}) \quad (10)$$

## 3 数值仿真与分析

图3为5-ACPC-SPC码( $M=5$ )在不同交织长度下的误比特率仿真值, 并给出了利用式(10)计算得到的误比特率理论近似值, 以及5-PC-SPC码的仿真值和理论值<sup>[4]</sup>。仿真条件及参数为: BPSK调制, AWGN信道, 迭代30次,  $R=0.5$ ,  $M=k=5$ 。

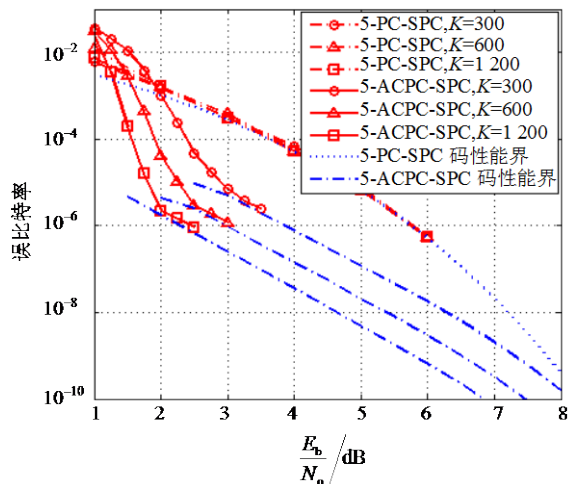


图3 M-ACPC-SPC码的BER性能( $M=5$ )

图中, 5-ACPC-SPC码的错误平层随着交织长度 $K$ 的增加逐渐降低, 说明M-ACPC-SPC码具有一定的交织增益; 当 $(E_b/N_0) < 8$  dB时, 不同长度的5-ACPC-SPC码的错误平层均明显低于5-PC-SPC码。

图4给出了当 $M$ 不同时, M-ACPC-SPC码的误比特率仿真结果及式(10)的理论计算结果, 以及相同长度下(37,21)Turbo码的平均性能界<sup>[10]</sup>。仿真条件为: BPSK调制, AWGN信道, 迭代60次,  $R=0.5$ 。

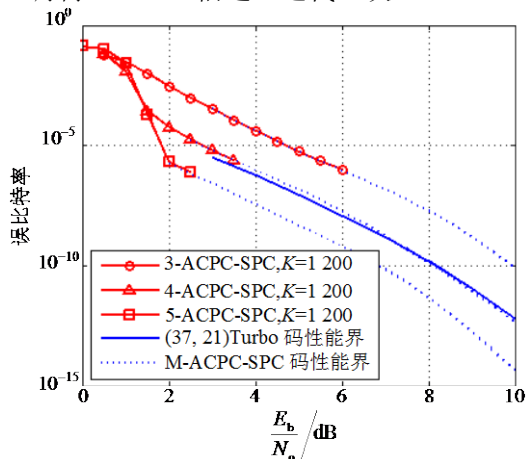


图4 M-ACPC-SPC码的BER性能( $M=3, 4, 5$ )

从图中可以看出, M-ACPC-SPC码的错误平层随着交织器数目的增加而逐渐降低; 5-ACPC-SPC码具有比(37,21)Turbo码更低的错误平层, 进一步验证了图2中的仿真结果。此外, 从图3、图4均可看出, 高信噪比下理论近似误比特率与仿真值匹配良好, 因此无需大量仿真, 由式(10)即可获取M-ACPC-SPC码在高信噪比下的误比特率。

## 4 结束语

本文对M-ACPC-SPC码的误比特率性能进行了仿真及理论分析, 推导了该码的平均输入冗余重量

枚举函数及平均误比特率性能上界, 并提出了该码在高信噪比下的误比特率近似表达式。性能分析结果表明, M-ACPC-SPC码的错误平层随着交织器数目 $M$ 及交织长度 $K$ 的增加逐渐降低。但由分析可知, 此时的编译码复杂度也将随之增大, 因此可根据系统要求对参数 $M$ 、 $K$ 进行选择。

## 参 考 文 献

- [1] BERROU C, GLAVIEUX A, THITIMAJSHIMA P. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Communication. Geneva: IEEE, 1993: 1064-1070.
- [2] MACKAY D J C, NEAL R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes[J]. Electronics Letters, 1996, 32 (18): 1645-1646.
- [3] COSTELLO D J, FORNEY G D. Channel coding: the road to channel capacity[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(6): 1150-1177.
- [4] TEE J S K, TAYLOR D P, MARTIN P A. Multiple serial and parallel concatenated single parity-check codes[J]. IEEE Trans on Communications, 2003, 51(10): 1666-1675.
- [5] JIN H, KHANDEKAR A, MCELIECE R. Irregular repeat-accumulate codes[C]//Proceedings of 2nd International Symposium on Turbo Codes & Related Topics. Brest, France: [s.n.], 2000: 1-8.
- [6] ZHANG Y, RYAN W E. Structured IRA codes: performance analysis and construction[J]. IEEE Trans on Communications, 2007, 55(5): 837-844.
- [7] LAN L, ZENG L Q, TAI Y Y, et al. Construction of quasi-cyclic LDPC codes for AWGN and binary erasure channels: a finite field approach[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(7): 2429-2458.
- [8] GARCIA-FRIAS J, ZHONG W. Approaching Shannon performance by iterative decoding of linear codes with low-density generator matrix[J]. IEEE Communication Letters, 2003, 7(6): 266-268.
- [9] BABICH F, COMISSO M. Channel coding and multi-antenna techniques for distributed wireless networks [C]//Proceedings of IEEE GLOBECOM'07. Washington, D C, USA: IEEE, 2007: 4180-4184.
- [10] LI P, HUANG X L, PHAMDO N. Zigzag codes and concatenated zigzag codes[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2001, 47(2): 800-807.
- [11] HU X Y, ELEFTHERIOU E, ARNOLD D M. Regular and irregular progressive edge growth Tanner graphs[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51(1): 386-398.
- [12] BENEDETTO S, MONTORSI G. Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding structures[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1996, 42(2): 409-428.

编辑 张俊