第 39 卷　第 4 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.39　No.4
2010年7月　　Journal of University of Electronic Science and Technology of China　　Jul. 2010

变时滞神经网络鲁棒稳定的一个新判据

邵晋梁，黄廷祝

(电子科技大学数学科学学院　成都　610054)

【摘要】研究了一类变时滞区间细胞神经网络的全局渐近鲁棒稳定性。基于非负矩阵理论和Lyapunov-Razumikhin分析方法，得到了变时滞区间细胞神经网络全局渐近鲁棒稳定的一个充分条件，该条件与时滞参数无关且易于验证。理论分析和数值例子表明所得条件推广了已有文献中得到的两个相应的结果，是对区间神经网络鲁棒稳定性研究的有效补充。数值例子和相应的计算机仿真验证了所得结果的有效性。

关　键　词　细胞神经网络;　非负矩阵;　鲁棒稳定性;　时滞

中图分类号　TP18　　　**文献标识码**　A　　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.04.031

New Criterion for Robust Stability of Neural Networks with Time-Varying Delays

SHAO Jin-liang and HUANG Ting-zhu

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China　Chengdu　610054)

Abstract　The global asymptotical robust stability of neural networks with time-varying delays is investigated. Based on nonnegative matrix theory and Lyapunov-Razumikhin technique, a sufficient condition for global asymptotical robust stability is given, which is independent of time delays and can be verified easily. Theoretical analysis and numerical examples show that the obtained condition generalizes two corresponding results derived in the literatures, and complements the results concerning the robust stability research of neural networks effectively. A numerical example and the corresponding computer simulation are presented to verify the effectiveness of the obtained result.

Key words　cellular neural networks;　nonnegative matrix;　robust stability;　time delays

文献[1]提出的细胞神经网络是目前应用比较广泛的一类人工神经网络模型，已成功应用于信号处理、图像处理、最优控制、模式识别和解非线性代数方程等工程领域。所有应用都依赖于神经网络平衡点的存在性与稳定性，如在最优控制的应用中，要求对每一个外部输入，所设计的神经网络都有唯一的全局渐近稳定的平衡点。然而在网络的硬件实现中，由于信号传输速度的有限性，使网络系统中时间滞后不可避免。另外，在实现超大规模集成芯片过程中，由于建模误差的存在，以及外部的干扰和参数波动等不可避免的不确定性因素，使神经网络的稳定性经常被破坏。因此，文献[2]把细胞神经网络模型推广到一类区间细胞神经网络模型，并研究了该模型的全局渐近鲁棒稳定性。由于区间细胞神经网络在实际应用中的重要性，对其鲁棒稳定性的研究已经成为近年来人们研究的热点之一，并获得了一系列有意义的结果[2-18]。在前人工作的启发下，本文将讨论一类变时滞区间细胞神经网络的全局渐近鲁棒稳定性。通过运用Lyapunov-Razumikhin方法与非负矩阵理论，得到了变时滞区间细胞神经网络全局渐近鲁棒稳定的一个新判据，所得结果与时滞无关且易于验证。理论分析和数值例子显示所得结果是对现有结果的补充，而且推广了文献[9]和[10]中的两个定理。计算机仿真也验证了所得结果的有效性。

1　系统描述和预备工作

本文研究的变时滞细胞神经网络的动态行为可用非线性微分方程描述为：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau(t))) + u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

收稿日期：2008 – 12 – 10；修回日期：2009 – 09 –12
基金项目：国家自然科学基金(60973015)；四川省国际科技合作与交流项目(2009HH0025)
作者简介：邵晋梁(1981–)，男，博士，主要从事神经网络动力学分析和多智能体系统方面的研究.

写成向量形式为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{u} \quad (2)$$

式中 $x_i(t)$ 是第 i 个神经元的状态变量，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_i)$ 是一个正对角矩阵；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 为连接权矩阵；$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))=(g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)),\cdots,g_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}}$ 是神经元的激励函数；时间滞后 $\tau(t)$ 为连续的有界函数，$0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$；$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 为输入的常向量。系统参数 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的取值如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_I:=\{\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_i):\ 0<\underline{\boldsymbol{D}}\leqslant\boldsymbol{D}\leqslant\overline{\boldsymbol{D}},\ \text{i.e., } 0<\underline{d}_i\leqslant d_i\leqslant\overline{d}_i, i=1,2,\cdots,n\}\\ \boldsymbol{A}_I:=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}:\ \overline{\boldsymbol{A}}\leqslant\boldsymbol{A}\leqslant\underline{\boldsymbol{A}},\ \text{i.e., } \underline{a}_{ij}\leqslant a_{ij}\leqslant\overline{a}_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n,\}\\ \boldsymbol{B}_I:=\{\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}:\ \overline{\boldsymbol{B}}\leqslant\boldsymbol{B}\leqslant\underline{\boldsymbol{B}},\ \text{i.e., } \underline{b}_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant\overline{b}_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n\}\end{cases} \quad (3)$$

假设对所有 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，神经激励函数 $g_i(\cdot):R\to R$ 为全局Lipschitz连续的，并具有Lipschitz常数 $l_i>0$，即：

$$|g_i(x_i)-g_i(y_i)|\leqslant l_i|x_i-y_i|,\ \forall i,\ \forall x_i,y_i\in R \quad (4)$$

本文使用以下参量记号：

(1) 对于向量有 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{x}|=(|x_1|,|x_2|,\cdots|x_n|)^{\mathrm{T}}$，$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{1/2}$；

(2) 对于矩阵有 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}\geqslant0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵，即 $a_{ij}\geqslant0$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的元素满足 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，且 $|\boldsymbol{A}|=(|a|_{ij})_{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$。

定义 1[9] [9]假设以式(1)描述的神经网络系统(下文简称为系统(1))的参数满足式(3)，若对任意的 $\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{D}_I$，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{A}_I$，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}_I$，系统(1)都有唯一的全局渐近稳定的平衡点，则系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。

定义 2[19] 对于实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若有 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\geqslant0$，$s>\rho(\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵。

引理 1[19] 设实矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant0$ 且 $\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$，则 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\rho(\boldsymbol{B})$。

引理 2[8,13] 对于 $\boldsymbol{A}\in[\overline{\boldsymbol{A}},\underline{\boldsymbol{A}}]$，$\boldsymbol{B}\in[\overline{\boldsymbol{B}},\underline{\boldsymbol{B}}]$，下列不等式成立：

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}^*\|_2+\|\boldsymbol{A}_*\|_2 \text{ 或 } \|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\hat{\boldsymbol{A}}\|_2 \quad (5)$$

$$\|\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{B}^*\|_2+\|\boldsymbol{B}_*\|_2 \text{ 或 } \|\boldsymbol{B}\|_2\leqslant\|\hat{\boldsymbol{B}}\|_2 \quad (6)$$

式中 $\hat{\boldsymbol{A}}=(\hat{a}_{ij})_{n\times n}$，$\hat{a}_{ij}=\max\{|\underline{a}_{ij}|,|\overline{a}_{ij}|\}$；$\hat{\boldsymbol{B}}=(\hat{b}_{ij})_{n\times n}$，$\hat{b}_{ij}=\max\{|\underline{b}_{ij}|,|\overline{b}_{ij}|\}$；$\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{A}}+\underline{\boldsymbol{A}})$；$\boldsymbol{A}_*=\frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{A}}-\underline{\boldsymbol{A}})$；$\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{B}}+\underline{\boldsymbol{B}})$；$\boldsymbol{B}_*=\frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{B}}-\underline{\boldsymbol{B}})$。

引理 3[9] 如果函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}):R^n\to R^n$ 为连续函数，且 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为单射，即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}), \forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\to\infty$，则 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为 R^n 上的同胚映射。

Lyapunov-Razumikhin方法是研究时滞微分方程解的稳定性的一个重要且有效的方法。文献[20]推广了该方法，得到了如下结果。

引理 4[20-21] 考虑以下泛函微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x_t), \quad (7)$$

式中 $f:R^+\times C\to R^n$，C 是 $[-\tau,0]$ 到 R 的全体连续函数构成的空间；$f(t,0)=0$；$x_t\in C$ 且 $s\in[-\tau,0]$。如果存在正定的Lyapunov函数 $\mathrm{V}(\boldsymbol{x}):R^n\to R$ 和一个正数 N 使得对任意 $0\neq\|\boldsymbol{\phi}\|<N$ 且 $\max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant0}\mathrm{V}(\boldsymbol{\phi}(s))=\mathrm{V}(\boldsymbol{\phi}(0))$，都有 $\mathrm{V}'(\phi)<0$，其中 $\mathrm{V}'(\phi)$ 表示V沿式(7)的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\phi})$ 的右上导数，$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 表示式(7)的一个解，其初值为 $x_i(s)=\phi_i(s), i=1,2,\cdots,n,\ s\in[-\tau,0]$，$\boldsymbol{\phi}(s)=(\phi_1(s),\phi_2(s),\cdots,\phi_n(s))^{\mathrm{T}}$，则微分方程(7)的解 $\boldsymbol{x}=0$ 为全局渐近稳定的。

2 全局渐近鲁棒稳定性分析

下面给出本文的主要结论。为论述方便，令：

$$d_m=\min(\underline{d}_i)$$

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)$$

$$L_M=\max(l_i)$$

$$K_1=\min(\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}),2L_M(\|\boldsymbol{A}^*\|_2+\|\boldsymbol{A}_*\|_2))$$

$$K_2=\min(2L_M(\|\boldsymbol{B}^*\|_2+\|\boldsymbol{B}_*\|_2),2L_M\|\hat{\boldsymbol{B}}\|_2)$$

定理 1 对于具有条件(3)的系统(1)，若假设式(4)成立，且 $2d_m-K_1-K_2>0$，则系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。

证明 定义与系统(1)相联系的非线性映射为：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}$$

显然，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$ 的解是系统(1)的平衡点。若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为同胚映射，则系统(1)必有唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)=0$。所以要证平衡点的唯一性，只需根据引理3证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为 R^n 上的同胚映射。

首先证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为单射。对于向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in R^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，可得：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$$

等式两边同时乘以 $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$ 可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}))=$$
$$-2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))+$$
$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\tag{8}$$

分别考虑式(8)等号右边的3项，首先可得：

$$-2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\leqslant-2d_m\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\tag{9}$$

其次可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=$$
$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\mathrm{T}}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

由于 $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}}$ 为对称的非负矩阵，而且有 $\|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}}\leqslant\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，根据引理1，可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\mathrm{T}}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant$$
$$\rho(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant$$
$$\rho\ (\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\tag{10}$$

根据引理2，还可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\|_2\leqslant$$
$$2L_M(\|\boldsymbol{A}^*\|_2+\|\boldsymbol{A}_*\|_2)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\tag{11}$$

由式(10)和(11)可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$\min(\rho(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^{T}),2L_M(\|\boldsymbol{A}^*\|_2+\|\boldsymbol{A}_*\|_2)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)=$$
$$K_1\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2\tag{12}$$

最后，根据引理2可得：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_2\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\|_2\leqslant$$
$$2K_2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2,\tag{13}$$

式中　$K_2=\min(2L_M(\|\boldsymbol{B}^*\|_2+\|\boldsymbol{B}_*\|_2),2L_M\|\hat{\boldsymbol{B}}\|_2)$

将不等式式(9)、(12)、(13)代入式(8)知，对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 有：

$$2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}))\leqslant$$
$$-(2d_m-K_1-K_2)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2<0$$

所以对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，都有 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$，即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为 R^n 上的单射。若 $\boldsymbol{y}=0$，则有：

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(0)\right)\leqslant-\left(2d_m-K_1-K_2\right)\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$
$$2\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(0)\|_2\geqslant\left(2d_m-K_1-K_2\right)\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$
$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\|_2+\|\boldsymbol{H}(0)\|_2\geqslant\frac{2d_m-K_1-K_2}{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

由于 $\|\boldsymbol{H}(0)\|_2$ 有界，显然有 $\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\to\infty$。根据引理3，可知 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为 R^n 上的同胚映射，所以对任意的系统参数 $\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{I}}$，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{I}}$，系统(1)都有唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$。

下面证明平衡点的全局渐近鲁棒稳定性。令 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*$，对系统(1)做变量替换，可得：

$$\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(y_j(t))+$$
$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(y_j(t-\tau(t)))\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{14}$$

式中　$f_j(y_j)=g_j(y_j+x_j^*)-g_j(x_j^*)$，$j=1,2,\cdots,n$。注意到 $f_j(0)=0$，$f_j(\cdot)$ 满足式(4)，且系统(14)有唯一的平衡点 $\boldsymbol{y}=0$。考虑如下Lyapunov函数：

$$V(\boldsymbol{y}(t))=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)=\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2$$

显然，$V(\boldsymbol{y}(t))$ 正定且径向无界。计算 $\mathrm{V}(\boldsymbol{y}(t))$ 沿式(14)的轨道对时间 t 的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(t)+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$$
$$+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t)))$$

根据式(9)、(12)、(13)可得：

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}\leqslant-2d_m\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+$$
$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau(t)))\leqslant$$
$$-(2d_m-K_1)\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2+K_2\|\boldsymbol{y}(t)\|_2\|\boldsymbol{y}(t-\tau(t))\|_2$$

对于满足 $\boldsymbol{y}(t)\neq0$ 和 $\max\limits_{s\in[-\tau,0]}\|\boldsymbol{y}(t+s)\|_2=\|\boldsymbol{y}(t)\|_2$ 的 t 可得：

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}\leqslant-\left(2d_m-K_1-K_2\right)\|\boldsymbol{y}(t)\|_2^2<0$$

根据引理4，可知系统(1)的平衡点是全局渐近鲁棒稳定的。命题得证。

推论 1　对于具有条件(3)的系统(1)，如果式(4)成立，且有 $2d_m-2L_M\|\hat{\boldsymbol{A}}\|_2-K_2>0$，则系统(1)是全

局渐近鲁棒稳定的。

证明　因为$\|\cdot\|_2$是相容范数，所以有：

$$\rho(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\leqslant L_M\rho(\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\leqslant 2L_M\left\|\hat{\boldsymbol{A}}\right\|_2$$

则有：

$$2d_m-K_1-K_2\geqslant 2d_m-2L_M\left\|\hat{\boldsymbol{A}}\right\|_2-K_2>0$$

根据定理1，可知系统(1)的平衡点是全局渐近鲁棒稳定的。命题得证。

推论 2　对于具有条件(3)的系统(1)，如果式(4)成立，且有：

$$2d_m-2L_M(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2)-L_M(\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_1+\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_\infty)>0$$

则系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。

证明　对于矩阵范数，有$2\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_2\leqslant\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_1+\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_\infty$，所以：

$$2d_m-K_1-K_2\geqslant 2d_m-2L_M(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2)-L_M(\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_1+\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_\infty)>0$$

根据定理1，可知系统(1)的平衡点是全局渐近鲁棒稳定的。命题得证。

3　结果分析与数值仿真

下面通过数值例子和计算机仿真说明定理1的有效性，并将其与已有文献中的一些结果作相应的比较。

定理 2[9]　假设式(4)成立，且时滞为常数$\tau_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，如果有：

$$2d_m-2L_M(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2)-L_M(\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_1+\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_\infty)>0$$

则系统(1)为全局渐近鲁棒稳定的。

定理 3[10]　假设式(4)成立，且时滞为常数$\tau_j(j=1,2,\cdots,n)$，如果有：

$$\Theta=\frac{d_m}{L_M}-(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{B}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{B}_*\right\|_2)>0$$

则系统(1)为全局渐近鲁棒稳定的。

注意到定理2的条件和推论2的条件是一样的，且在定理1中，讨论的细胞神经网络的时间滞后是随时间变化的，所以定理1推广了定理2的结果。定理3中，$\Theta>0$等价于：

$$\varOmega=2d_m-2L_M(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{B}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{B}_*\right\|_2)>0$$

显然$2d_m-K_1-K_2\geqslant\varOmega>0$，且定理1讨论了变时滞细胞神经网络的全局鲁棒稳定性，所以定理1推广了定理3的结果。

定理 4[11]　假设式(4)成立，并且$\underline{\boldsymbol{D}}-(\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{L}$为$M$-矩阵，则系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。

定理 5[12]　假设式(4)成立且激活函数有界，如果存在正对角矩阵$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(q_i)$，正数$r$、$s$和$k$使得下列线性矩阵不等式成立：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\boldsymbol{QD}+\boldsymbol{DQ}-2k\boldsymbol{Q}-\frac{1}{r}\boldsymbol{U}-\frac{1}{s}\boldsymbol{W} & \sqrt{r}\boldsymbol{QL}\\ \sqrt{r}\boldsymbol{QL} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}>0\\ \frac{s}{2k}\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{l_i^2\}<1\end{cases}\tag{15}$$

式中　$\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(u_i)$；$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(v_i)$，且：

$$\begin{cases}u_i=\sum\limits_{j=1}^n(\hat{a}_{ij}\sum\limits_{k=1}^n\hat{a}_{kj})\\ w_i=\sum\limits_{j=1}^n(\hat{b}_{ij}\sum\limits_{k=1}^n\hat{b}_{kj})\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

则系统(1)为全局渐进鲁棒稳定。

本文用数值例子说明定理1与定理4和5的区别。

例 1　假设系统(1)具有参数$\underline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-0.6 & -1\\ -0.8 & -1\end{bmatrix}$、$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1.2 & 1.2\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$、$\underline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1.2 & -0.2\end{bmatrix}$、$\overline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}1.2 & 1.5\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$和$\underline{d}_1=\underline{d}_2=d_m=5.1$、$l_1=l_2=L_M=1$，通过计算可得$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1.2 & 1.2\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$、$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}1.2 & 1.5\\ 1.2 & 1.5\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.25\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{A}_*=\begin{bmatrix}0.9 & 1.1\\ 0.9 & 1.25\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}0.6 & 0.25\\ -0.1 & 0.65\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}_*=\begin{bmatrix}0.6 & 1.25\\ 1.1 & 0.85\end{bmatrix}$，则有：

$$K_1=\min(\rho(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{A}}^T),2L_M(\left\|\boldsymbol{A}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{A}_*\right\|_2))=\min(4.9204,4.9485)=4.9204,$$

$$K_2=\min(2L_M(\left\|\boldsymbol{B}^*\right\|_2+\left\|\boldsymbol{B}_*\right\|_2),2L_M\left\|\hat{\boldsymbol{B}}\right\|_2)=\min(5.2772,5.4332)=5.2772,$$

运用定理1，可得$2d_m-K_1-K_2>0$，所以具有以上参数的系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。

运用定理4，可得$\underline{\boldsymbol{D}}-(\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}2.7 & -2.7\\ -2.2 & 2.1\end{bmatrix}$不是$M$-矩阵，所以定理4不能判别该系统的全局鲁棒稳定性。考虑定理5，利用MATLAB中的LMI工具箱求解线性矩阵不等式式(15)，可得该矩阵不等式没有可行解，所以定理5也不能用于该系统全局鲁

棒稳定性的判别。

例 2 假设系统(1)具有参数 $\underline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.9\\ 0.4 & -1\end{bmatrix}$、$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.9\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}$、$\underline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0 & -0.4\\ -1.2 & -0.6\end{bmatrix}$、$\overline{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\ 1 & 0.6\end{bmatrix}$和 $\underline{d}_1=\underline{d}_2=d_m=3.6$、$\tau(t)=|\sin t|$、$g_1(x)=g_2(x)=0.5x+\sin 0.5x$、$\boldsymbol{u}=(2,-3)^{\mathrm{T}}$，运用定理1，可得 $2d_m-K_1-K_2=0.2126>0$。

所以具有以上参数的系统(1)是全局渐近鲁棒稳定的。在文献[2-3]、[8]、[12-13]和[15-16]中，激活函数假设为有界函数；在文献[2-10]和[13]中，考虑的时间滞后为常数；在文献[14-15]中，考虑的变时滞为可导函数。所以以上文献所得的结果都不能用于该系统全局鲁棒稳定性的判别。

最后，通过计算机仿真验证定理1的有效性。考虑 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.4 & -0.5\\ 1 & -1\end{bmatrix}\in[\underline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{A}}]$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ -1 & 0.5\end{bmatrix}\in[\underline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{B}}]$，利用MATLAB的Simulink工具箱可得，对于任意的初值，系统(1)的状态曲线都收敛到唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*=(0.5876,-0.7345)^{\mathrm{T}}$，验证了理论结果的正确性。仿真结果见图1。

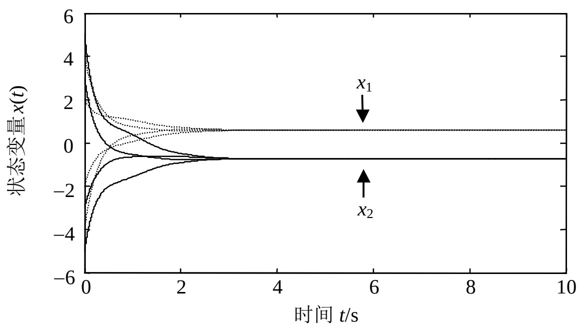

图1 对于不同初值系统(1)的状态响应

4 结 论

本文运用Lyapunov-Razumikhin方法和非负矩阵理论，给出了一类变时滞区间细胞神经网络全局渐近鲁棒稳定的一个新的充分条件。所得条件推广了文献[9]和[10]中的两个结果。数值例子和计算机仿真验证了所得结果的有效性。在研究过程中，取消了一些文献中所作的神经激励函数有界和变时滞可导的假设，得到了一个与时滞无关的充分条件，且该条件易于验证。在实际应用中，可以作为网络综合的准则和判据，设计全局渐近鲁棒稳定的变时滞细胞神经网络，并使网络有更宽的适应范围和调整余地，对某些应用领域如全局优化问题有一定的现实意义。

参 考 文 献

[1] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: theory and applications[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1988, 35(10): 1257-1290.

[2] LIAO X F, YU J B. Robust stability for interval hopfield neural networks with time delay[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1998, 9: 1042-1045.

[3] CAO J D, CHEN T P. Globally exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 957-963.

[4] SUN C Y, FENG C B. Global robust exponential stability of internal neural networks with delays[J]. Neural Processing Letters, 2003, 17: 107-115.

[5] LI X L, CAO J D. Global exponential robust stability of delayed neural networks[J]. International Joural of Bifurcation and Chaos, 2004, 14: 2925-2931.

[6] CAO J D, WANG J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. IEEE Trans Circuits and System I, 2005, 52: 417-426.

[7] CHEN A P, CAO J D, HUANG L H. Global robust stability of interval cellular neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 787-799.

[8] CAO J D, HUANG D S, QU Y Z. Global robust stability of delayed recurrent neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 221-229.

[9] OZCAN N, ARIK S. An analysis of global robust stability of neural networks with discrete time delays[J]. Physics Letters A, 2006, 359: 445-450.

[10] OZCAN N, ARIK S. Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. IEEE Trans Circuits and Systems I, 2006, 53(1): 166-176.

[11] ZHANG J Y. Global exponential stability of interval neural networks with variable delays[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19: 1222-1227.

[12] LI C D, LIAO X F, ZHANG R. A global exponential robust stability criterion for interval delayed neural networks with variable delays[J]. Neurocomputing, 2006, 69: 803-809.

[13] SINGH V. Global robust stability of delayed neural networks: estimating upper limit of norm of delayed connection weight matrix[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 259-263.

[14] OU O. Global robust exponential stability of delayed neural networks: An LMI approach[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 1742-1748.

[15] YU W W, YAO L L. Global robust stability of neural networks with time varying delays[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206(2): 679-687.

[16] SHEN T, ZHANG Y. Improved global robust stability criteria for delayed neural networks[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems II, 2007, 54(8): 715-719.

[17] SHAO J L, HUANG T Z. A note on “Global robust

stability criteria for interval delayed neural networks via an LMI approach"[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II, 2008, 55(11): 1198-1202.

[18] SHAO J L, HUANG T Z, ZHOU S. An analysis on global robust exponential stability of neural networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2009, 72(7-9): 1993-1998.

[19] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1991.

[20] HADDOCK J R, TERJEKI J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations[J]. Journal of Difference Equations, 1983, 48: 95-122.

[21] ZHANG Q, WEI X P, XU J. An analysis on the global asymptotic stability for neural networks with variable delays[J]. Physics Letters A, 2004, 328: 163-169.

编 辑 蒋 晓

(上接第584页)

[12] 朴承镐, 高文信, 蔡　立. 轨迹成型法精密磨削加工机床的精度分析[J]. 光学技术, 1999, 1(1), 54-57.
PIAO Cheng-hao, GAO Wen-xin, CAI Li. Precision analysis of precisely grinding machining machine for locus shaping method[J]. Optical Technology, 1999, 1(1), 54-57.

[13] 杜西亮, 戴景民. 基于神经网络的分振幅光偏振仪的数据处理[J]. 中国激光, 2007, 34(1): 89-93.
DU Xi-liang, DAI Jing-min. Data processing method for the division-of-amplitude photopolarimeter based on an artificial neural network[J]. Chinese Journal of Lasers, 2007, 34(1): 89-93.

[14] 於自岚, 高传玉, 曾丹勇, 等. 激光冲击区表面质量的人工神经网络研究[J]. 激光技术, 2001, 25(1): 1-6.
YU Zi-lan, GAO Chuan-yu, ZENG Dan-yong. Study of the surface qualities of laser shock-processing zones using an artificial neural network[J]. Laser Technology, 2001, 25(1): 1-6.

[15] 万来毅, 陈建勋, 王卫平, 等. 基于BP神经网络的图像识别研究. 武汉科技大学学报(自然科学版), 2006, 29(3): 277-279.
WAN Lai-yi, CHEN Jian-xun, WANG Wei-ping, et al. Image recognition based on BP neural network[J]. Journal of Wuhan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2006, 29(3): 277-279.

编 辑 漆 蓉

(上接第602页)

[5] 卿斯汉. 一种电子商务协议形式化分析方法[J]. 软件学报, 2005, 16(10): 1757-1765.
QING Si-han. A formal method for analyzing electronic commerce protocols[J]. Journal of Software, 2005, 16(10): 1757-1765.

[6] PAGNIA H, GATNER F C. On the impossibility of fair exchange without a trusted third party[R]. Darmstadt, Germany: Darmstadt University of Technology, 1999.

[7] ALPTEKIN K, ANNA L. Usable optimistic fair exchange [J/OL]. [2008-11-19]. Cryptology ePrint Archive, http://eprint.iacr.org/2008/431.pdf.

[8] ZHENG Y. Digital signcryption or how to achieve cost (signature and encryption) << cost(signature) + cost (encryption)[C]//Advance Cryptology-CRYPTO'97. Berlin: Springer-Verlag, 1997, 1294: 169-179.

[9] WU T, HSU C. Convertible authenticated encryption scheme[J]. The Journal of Systems and Software, 2002, 62: 205-209.

[10] WANG Gu-lin, BAO Feng, MA Chang-she. Efficient authenticated encryption schemes with publicly verifiability[C]//IEEE 60th Vehicular Technology Conference. Los Angeles: IEEE, 2004: 3258-3261.

[11] DOLEV D, YAO A. On the security of public key protocols[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1983, 29(2): 198-208.

编 辑 蒋 晓