

相空间法对混沌序列的自相关特性研究

陈 滨¹, 刘光祜², 唐 军¹, 张 勇¹, 蔡 鹏¹, 黄 坚¹, 吴云松¹

(1. 江西财经大学软件与通信工程学院 南昌 330013; 2. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

【摘要】混沌序列已作为伪随机序列得到广泛应用, 但如何判断混沌序列的相关特性、调制后相关特性的好坏, 以及其理论依据, 至今尚无定论, 使其应用受到限制。该文给出了判断混沌序列自相关特性好坏的一个简单有效的方法。用相空间法对混沌序列的自相关特性作了研究, 发现相空间轨迹是否具有轴对称性与其自相关函数好坏相对应, 证明了相空间轨迹具有轴对称结构的序列有好的自相关函数, 并通过仿真予以了证实。

关键词 自相关; 混沌映射; 相空间; 伪随机序列; Tent映射

中图分类号 TN958

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.06.012

Research on Chaotic Sequence Autocorrelation by Phase Space Method

CHEN Bin¹, LIU Guang-hu², TANG Jun¹, ZHANG Yong¹, CAI Peng¹, HUANG Jian¹, and WU Yun-song¹

(1. School of Software and Communication Engineering, Jiangxi University of Finance and Economy Nanchang 330013;

2. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract Chaotic sequences have been widely used as pseudorandom sequences. But the problem of how to judge the performances of their autocorrelation functions, up to now, has not yet been solved completely. Because of this, the applications of chaotic sequences are limited. In the paper, by method of phase space, we prove that the autocorrelation performance of a chaotic sequence is determined by whether its phase space trajectory is axis symmetrical, and we deduce a theorem that a sequence which phase space trajectory is axis symmetrical has good autocorrelation performance. The theorem is verified by simulations.

Key words autocorrelation; chaotic map; phase space; pseudorandom sequence; Tent map

混沌序列具有类随机性^[1-6], 近来已作为伪随机序列在保密通信、雷达等方面得到广泛应用^[3-18]。但混沌序列的自相关问题, 以及在各种调制方式下的调制后信号自相关问题, 长久以来没有得到解决, 导致混沌序列在应用中受到诸多限制。

近来大量文献^[1-11,18]欲将混沌序列作为噪声源用于噪声雷达。但有一些混沌序列, 本身自相关特性差; 还有一些混沌序列, 虽然本身自相关特性好, 但经过调制后, 自相关性能大幅下降^[3-6], 对雷达信号的准确检测和识别很不利, 引起学术界对混沌序列自相关特性及调制后自相关特性的关注^[2-7]。

本文就混沌序列的自相关问题进行探讨。利用相空间方法, 证明了相图轨迹具有对称结构的混沌序列具有好的自相关函数。

1 混沌序列的相关性问题

性能良好序列的自相关函数的波形应为一根尖细的针形, 没有突出的副瓣, 实际运用起来才有利于信号的准确检测和识别。如图1所示的Tent序列的自相关函数, 主峰尖细, 副瓣很低, 以至于在图上看不到, 性能很好。Tent序列自相关函数性能虽然很好, 但经过随机频率调制(random frequency modulation, RFM)后, 自相关函数变差, 如图2所示, 副瓣很多很高, 性能变差。Bernoulli序列的自相关函数曲线如图3所示, 其主峰比较粗, 性能较差。因此, 不仅混沌序列的自相关特性有差异, 经过调制后自相关特性也可能出现差异。

收稿日期: 2009-05-04; 修回日期: 2010-01-18

基金项目: 江西省教育厅科技基金(GJJ09286, GJJ09553, GJJ09554)

作者简介: 陈 滨(1971-), 男, 博士生, 主要从事混沌及其在雷达和通信中应用的研究。

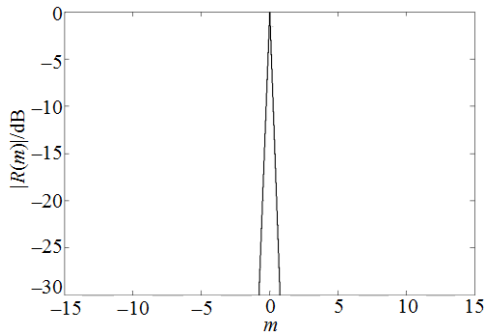


图1 Tent序列调制前的归一化自相关函数

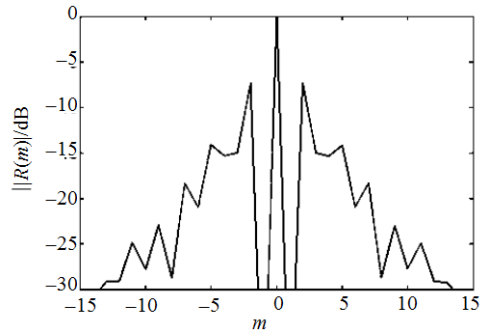


图2 Tent序列调制后的归一化自相关函数

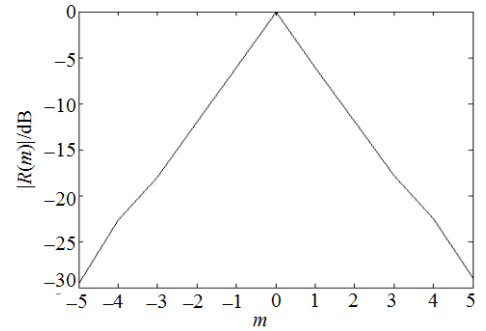


图3 Bernoulli序列归一化自相关函数

2 混沌序列的二维相空间及自相关函数

一个离散混沌系统的动力方程为:

$$x(n+1) = f[x(n)] \quad (1)$$

以Tent序列为例, Tent映射在一定条件下是混沌系统, 其动力方程为:

$$x(n+1) = a - b|x(n)| \quad (2)$$

式中 $a > 0; 0 < b < 2$ 。不失一般性, 本文取其参数为: $a = 1/2, b = (2 - 0.0001)$ 。初值 $x(0) \in [-0.5, 0.5]$, 演化范围 $x(n) \in (-0.5, 0.5)$, 均值为0, 其延迟1的二维相图如图4所示。Tent序列的混沌吸引子具有确定、清晰的结构, 且纵坐标轴对称。后面提到的混沌序列, 包括Tent序列, 都可认为是平稳遍历的^[3-6]。

对于长度为N平稳且遍历的序列 $\{x(n)\}$, 其自相关函数 $r(m)$ 为:

$$r(m) = \sum_{n=1}^{N-m} x(n)x^*(n+m) \quad (3)$$

对于一个实序列, 自相关函数为:

$$r(m) = \sum_{n=1}^{N-m} x(n)x(n+m) \quad (4)$$

序列的自相关函数 $r(m)$ 在 $m=0$ 时, 得到最大值 $r(0)$ 。

归一化自相关函数为:

$$R(m) = r(m) / r(0) \quad (5)$$

其中:

$$r(0) = \sum_{n=1}^N x(n)^2 \quad (6)$$

特别地, 当 $m=1$ 时, 有:

$$R(1) = \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+1) \quad (7)$$

Tent序列的归一化自相关函数性能好, 即自相关函数的波形为一根尖细的针形, 没有突出的副瓣; Bernoulli序列的自相关函数主峰比较粗大, 性能较差, 不利于信号检测。下面通过证明4个定理, 研究它们自相关函数性能差异的原因。

3 序列二维相图与自相关特性的联系

定理 1 对于一个平稳遍历的离散实动力系统

$$x(n+1) = f[x(n)] \quad (8)$$

其值域为 $[-a, a]$, a 为正实数; $\{x(n)\}$ 的均值为0, 且取值的正负具有统计平衡性。

由该系统产生一个长度为N的混沌序列 $\{x(n)\}$ 。

若 $\{x(n)\}$ 延迟为1的相图轨迹在统计意义上对纵坐标轴对称, 即对任意 $x(n)$ 满足 $x(n+1) = f[x(n)] = f[-x(n)]$, 如图4所示。

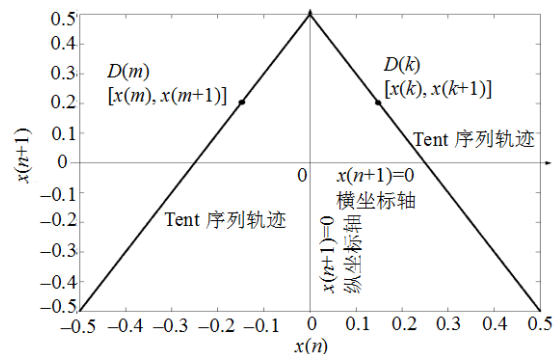


图4 Tent序列延迟1相图

则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 延迟 $m=1$ 的归一化自相关函数

$$R(1) = \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+1) \text{ 趋于0。}$$

证明 因为序列平稳遍历, 均值为0, 且延迟1

的相图轨迹依纵坐标轴对称, 图4为Tent序列延迟为1的相图。因此可在延迟1相图轨迹上任取关于纵轴对称的两点 $D(k)$ 、 $D(j)$, 其中 $D(k)$ 的坐标为 $[x_1(k), x_1(k+1)]$, $D(j)$ 的坐标为 $[x_1(j), x_1(j+1)]$, 且有 $x_1(j) = -x_1(k)$, $x_1(k+1) = x_1(j+1)$ 。

因为序列取值的正负具有统计平衡性, 所以对任意 $x(n)$, 有 $g[x(n)] = g[-x(n)]$, $g[x(n)]$ 为 $x(n)$ 的分布概率密度函数。

令 $P[x(n+1) = x_1(k+1)|x(n) = x_1(k)]$ 、 $g[x(n+1) = x_1(k+1)|x(n) = x_1(k)]$ 分别为条件 $x(n) = x_1(k)$ 下 $x(n+1) = x_1(k+1)$ 的条件概率、条件分布概率密度, 本文分别简写为 $P[x_1(k+1)|x_1(k)]$ 、 $g[x_1(k+1)|x_1(k)]$ 。因为 $f[x(n)] = f[-x(n)] = x(n+1)$, 所以对于轨迹上的点 $D(k)[x_1(k), x_1(k+1)]$, 有 $P[x_1(k+1)|x_1(k)] = P[x_1(k+1) - x_1(k)] = 1$ 。所以, 有 $g[x_1(k+1)|x_1(k)] = g[x_1(k+1) - x_1(k)]$ 。令 $g[x(n) = x_1(k), x(n+1) = x_1(k+1)]$ 为 $x(n) = x_1(k)$ 和 $x(n+1) = x_1(k+1)$ 的联合分布概率密度, 简写为 $g[x_1(k), x_1(k+1)]$ 。对纵轴对称的两点 $D(k)$ 、 $D(j)$ 有:

$$\begin{aligned} g[x_1(k), x_1(k+1)] &= \\ g[x_1(k+1)|x_1(k)] \times g[x_1(k)] &= \\ g[x_1(k+1) - x_1(k)] \times g[-x_1(k)] &= \\ g[x_1(j), x_1(j+1)] & \end{aligned} \tag{9}$$

即对轨迹上关于纵轴对称的任意两点 $D(k)$ 、 $D(j)$, 它们分布的概率密度相同, 也就是 $g[D(k)] = g[D(j)]$ 。

对相图轨迹上任一点 $D(k) [x_1(k), x_1(k+1)]$, 令函数 $h(k)$ 为:

$$h(k) = x_1(k)x_1(k+1) \tag{10}$$

关于纵轴对称的任意两点 $D(k)$ 、 $D(j)$ 有:

$$h(k) = x_1(k)x_1(k+1) = -[x_1(j)x_1(j+1)] = -h(j) \tag{11}$$

由式(11)有 $h(k) + h(j) = 0$, 即相图轨迹上关于纵轴对称的任意两点 $D(k)$ 、 $D(j)$ 有 $h(k) + h(j) = 0$ 。

显然, 相图轨迹上关于纵轴近似对称的任意两点 $D(k)$ 、 $D(j)$ 有 $h(k) + h(j) \approx 0$

又因关于纵轴对称的任意两点分布的概率密度相同, 因此, 可以把相图轨迹上的 $N-1$ 个点, 大致分成 $(N-1)/2$ 组, 每一组对纵轴近似对称。对其中任一组的两点 $D(k_n)$ 、 $D(j_n)$ 有 $h(k_n) + h(j_n) \approx 0$ 。

会有极少数的点因不对称或点数为奇数, 无法分组, 但因轨迹上关于纵轴对称的任意两点分布的概率密度相同, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 相图轨迹上点的分布更趋于对称, 无法分组的点不会随 N 的增加而无限增加, 即无法分组的点数有界。而

$\lim_{N \rightarrow \infty} R(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} h(n)$ 的分母

$\lim_{N \rightarrow \infty} r(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)^2 \rightarrow +\infty$, 因此, 无法分组的点对 $R(1)$ 的影响趋于0。可得:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \approx \frac{1}{+\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} 0 = 0。$$

原命题得证。

如图4所示, Tent序列延迟1的相图。其吸引子轨迹对纵坐标轴 $x(n)=0$ 对称, 则由定理1, 其归一化自相关函数 $R(1)$ 应趋近于0。图5表示 $N=2\ 000$ 的Tent序列的归一化自相关函数, $R(1)$ 趋近于0, 与定理1相符。用Logistic序列等其他序列检验, 可得同样结论。

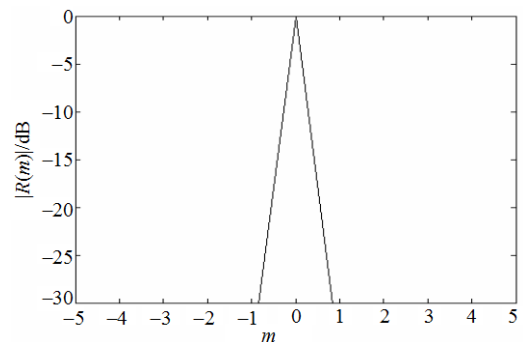


图5 Tent序列的归一化自相关函数

对于延迟1的相图轨迹, 依横坐标轴对称的情况, 有定理2。

定理 2 对于一个平稳遍历的离散实动力系统 $x(n+1) = f[x(n)]$ (12)

其值域为 $[-a, a]$, a 为正实数; $\{x(n)\}$ 的均值为0, 且取值的正负具有统计平衡性。

由该系统产生一个长度为 N 的混沌序列 $\{x(n)\}$ 。若 $\{x(n)\}$ 延迟为1的相图轨迹在统计意义上对横坐标轴对称, 即对任意 $x(n)$, 满足 $x(n) = f^{-1}[x(n+1)] = f^{-1}[-x(n+1)]$ 。

则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 延迟 $m=1$ 的归一化自相关函数

$$R(1) = \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+1) \text{ 趋于} 0。$$

定理2的证明与定理1的证明类似, 不在此赘述。定理2中对横坐标轴对称的动力系统, 可以用动力系统的每步演化值, 由概率0.5乘以 (-1) 得到。对Bernoulli序列作上述处理, 处理后序列的归一化自相关函数 $R(1)$ 趋近于0, 与定理2相符。

综上所述, 离散动力系统延迟为1的相图, 无论对横轴, 或纵轴, 亦或是同时对横、纵坐标轴统计对称, 都可得其归一化自相关函数 $R(1)$ 趋近于0。因

此,有以下结论成立。

结论 对于一个平稳遍历的离散实动力系统:

$$x(n+1) = f[x(n)] \quad (13)$$

其值域为 $[-a, a]$, a 为正实数; $\{x(n)\}$ 的均值为0,且取值的正负具有统计平衡性。

若 $\{x(n)\}$ 延迟为1的相图轨迹在统计意义上对横坐标轴,或对纵坐标轴对称,或对横、纵坐标轴都对称。则当 $N \rightarrow \infty$ 时,延迟 $m=1$ 的归一化自相关函数

$$R(1) = \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+1) \text{ 趋于} 0。$$

定理 3 对于一个平稳遍历的离散实动力系统

$$x(n+1) = f[x(n)] \quad (14)$$

其值域为 $[-a, a]$, a 为正实数; $\{x(n)\}$ 的均值为0,且取值的正负具有统计平衡性。

若 $\{x(n)\}$ 的延迟为1的相图轨迹在统计意义上对横坐标轴;或对纵坐标轴对称,或对横、纵坐标轴都对称。

则 $\{x(n)\}$ 除0外的任意延迟的相图轨迹,在统计意义上也对该坐标轴对称。

证明先证明延迟1相图轨迹对纵轴统计对称的条件下,延迟为2的相图轨迹依然对纵轴统计对称。

由延迟1相图轨迹对纵轴统计对称,可知对任意 $x(n)$,有 $x(n+1) = f[x(n)] = f[-x(n)]$ 。可得 $f\{f[x(n)]\} = f\{f[-x(n)]\} = f[x(n+1)] = x(n+2)$ 。又因为序列取值统计平衡,有 $g[x(n)] = g[-x(n)]$,

因此,可在延迟为2的相图轨迹上,任取一点 $D(k)$,则它对纵轴对称的点 $D(j)$,也在系统相图轨迹上,其中 $D(k)$ 的坐标为 $[x_2(k), x_2(k+2)]$; $D(j)$ 的坐标为 $[x_2(j), x_2(j+2)]$,且有 $x_2(j) = -x_2(k)$, $x_2(k+2) = x_2(j+2)$ 。

同定理1,可得:

$$\begin{aligned} g[x_2(k), x_2(k+2)] &= \\ g[x_2(k+2), x_2(k)] \times g[x_2(k)] &= \\ g[x_2(k+2) - x_2(k)] \times g[-x_2(k)] &= \\ g[x_2(j), x_2(j+2)] & \end{aligned} \quad (15)$$

即 $g[D(k)] = g[D(j)]$,关于 $D(k)$ 、 $D(j)$ 分布的概率密度依然相等。因此,延迟2相图轨迹依然对纵轴统计对称。

同理可得,除0外的任意延迟的相图轨迹,在统计意义上也对纵坐标轴对称。

对延迟1相图轨迹对横坐标轴对称的情况,同理可得,除0外的任意延迟的相图轨迹,在统计意义上也对横坐标轴对称。

综上所述,延迟为1的相图轨迹,在统计意义上对横坐标轴,或对纵坐标轴对称,或同时对横、纵坐标轴对称的条件下,可得除0外的任意延迟的相图轨迹,在统计意义上也对横坐标轴,或对纵坐标轴

对称,或同时对横、纵坐标轴对称。

原命题得证。

定理 4 对于一个平稳遍历的离散实动力系统

$$x(n+1) = f[x(n)] \quad (16)$$

其值域为 $[-a, a]$, a 为正实数; $\{x(n)\}$ 的均值为0,且取值的正负具有统计平衡性。

若 $\{x(n)\}$ 延迟为1的相图轨迹在统计意义上对横坐标轴,或对纵坐标轴对称,或对横、纵坐标轴都对称。即对任意 $x(n)$,满足 $x(n+1) = f[x(n)] = f[-x(n)]$,或满足 $x(n) = f^{-1}[x(n+1)] = f^{-1}[-x(n+1)]$,或两者都满足。

则当 $N \rightarrow \infty$ 时,对除0外的任意延迟 m ,其归一化自相关函数 $R(m) = \frac{1}{r(0)} \sum_{n=1}^{N-1} x(n)x(n+m)$,都趋于0。

综合前述结论及定理3,定理4得证。

从前述的Tent序列,可以检验定理4的正确性。

Tent序列满足定理4的条件,则除 $m=0$ 外的归一化自相关函数 $R(m)$ 都趋近于0,如图5所示,与定理4相符。考察Logistic序列等其他满足定理4条件的序列,可得同样的结论。

考察不满足定理4条件的序列,如图6所示 $N=2000$ 的Bernoulli序列的延迟1相图,其轨迹既不关于横坐标轴对称,也不关于纵坐标轴对称,图3表示其归一化自相关函数,可见当 $|m|=1, 2, 3, 4, 5$ 时, $R(m)$ 都较大,不趋近于0,自相关函数性能差。

至此,找到了Tent、Bernoulli序列自相关函数性能差异的原因。

定理4是针对动力系统而言,但可以推广到其他序列,如噪声序列等。

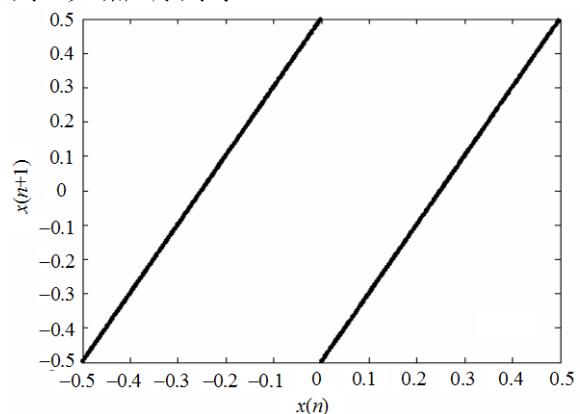


图6 Bernoulli序列延迟1相图

4 定理4的实质

由定理4可知,判断一个取值平衡的序列自相关特性,只需要在其延迟1的二维相图上,检验轨迹对坐标轴的统计对称性,若其对横或纵坐标轴统计对

称, 或对横、纵两坐标轴都统计对称, 则其自相关特性较好, 即具有突出的主峰, 没有高的旁瓣。前面用Tent序列和Bernoulli序列检验了定理4的正确性。此外, 本文还检验了很多其他序列, 都与定理4相符。

相图是反映一个动力系统内在本质的一种工具, 由它可以得知动力系统的结构。一般来说, 延迟1的二维相图, 相对于其他更大延迟相图而言, 结构最为简单、清晰。通过判断延迟1相图轨迹的对称性辨别序列相关性的方法, 是简单和实用的方法。

使序列取值正负平衡, 是比较容易的。常见的混沌序列, 如Tent序列、Bernoulli序列、Logistic序列、Chua序列、MSPL(multi-segment piecewise linear)序列^[5]等, 都可以满足, 或简单处理后满足取值正负平衡。

5 结论及展望

本文利用相空间方法证明了一个取值平衡序列, 若其延迟1的相图轨迹具有坐标轴对称结构, 则其自相关函数具有较好的特性。该结论以定理4的形式给出。在后续研究中, 将对本文结论(即定理4)的更多运用和序列的调制相关性进行探讨。

参 考 文 献

- [1] GAMBI E, CHIARALUCE F, SPINSANTE S. Chaos-based radars for automotive applications: Theoretical issues and numerical simulation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2008, 57(6): 3858-3863.
- [2] SUNE R J. Noise radar using random phase and frequency modulation[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2004, 42(11): 2370-2384.
- [3] FLORES B C, SOLIS E A, THOMAS G. Assessment of chaos-based FM signals for range-doppler imaging[J]. IEE Proc-Radar Sonar Navig, 2003, 150(4): 313-322.
- [4] FLORES B C, SOLIS E A, THOMAS G. Chaotic signals for wideband radar imaging[C]//Proc SPIE-Int Soc Opt Eng. Orlando, FL, USA: Proc SPIE, 2002, 4727: 100-111.
- [5] 陈 滨, 周正欧, 刘光祜, 等. 混沌噪声源在噪声雷达的应用[J]. 现代雷达, 2008, 30(5): 24-28.
CHEN Bin, ZHOU Zheng-ou, LIU Guang-hu, et al. Application of chaos series as noise source in noise radar[J]. Modern Radar, 2008, 30(5): 24-28.
- [6] CHEN Bin, TANG Jun, ZHANG Yong, et al. Chaotic signals with weak-structure used for high resolution radar imaging[C]//CMC 2009. Kunming, Yunnan: IEEE Press, 2009, 1: 325-330.
- [7] MYERS J, FLORES B C. Radar imaging via random FM correlations[C]//Proc SPIE-Int Soc Opt Eng. Orlando, FL, USA: Proc SPIE, 1999, 3721: 130-139.
- [8] VIJAYARAGHAVAN V, HENRY L. A novel chaos-based high-resolution imaging technique and its application to through-the-wall imaging[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(7): 528-531.
- [9] XU Y, NARAYANAN R M, XU X, et al. Polarimetric processing of coherent random noise radar data for buried object detection[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2001, 39(3): 467-478.
- [10] GU H, LIU G, ZHU X, et al. A new kind of noise-radar random binary phase coded CW radar[C]//Proc IEEE National Radar Conf Syracuse. NY, USA: IEEE Press, 1997: 202-206.
- [11] WU X, LIU W, ZHAO L, et al. Chaotic phase code for radar pulse compression[C]//Proc IEEE National Radar Conf. Atlanta, GA, USA: IEEE Press, 2001: 279-283.
- [12] DAWOOD M, NARAYANAN R M. Ambiguity function of an ultrawideband random noise radar[C]//Proc IEEE Antennas and Propagation Soc Int Symp. Salt Lake City, UT, USA: IEEE Press, 2000: 2142-2145.
- [13] 杨亚涛, 王曼珠, 张喆民. 超混沌序列的数字语音扩频调制研究[J]. 电子科技大学学报, 2007, 36(4): 699-702.
YANG Ya-tao, WANG Man-zhu, ZHANG Zhe-min. Research on digital sound spreading-frequency modulation based on hyperchaos sequence[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2007, 36(4): 699-702.
- [14] 钟黔川, 朱清新, 张平莉. 参数可变的混沌映射加密系统[J]. 电子科技大学学报, 2009, 38(4): 274-277.
ZHONG Qian-chuan, ZHU Qing-xin, ZHANG Ping-li. Multiple chaotic maps encryption system[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2009, 38(4): 274-277.
- [15] CHON K H, KANTERS J K, IYENGAR N, et al. Detection of chaotic determinism in stochastic short time series[C]//IEEE/EMBS Proc 19th International Conference. Chicago, IL, USA: IEEE Press, 1997: 275-277.
- [16] BUCOLO M, CAPONETTO R, FORTUNA L, et al. Does chaos work better than noise? [J]. Circuits and Systems Magazine, IEEE, 2002, 2(3): 4-19.
- [17] JOSE A R, EDUARDO R, JUAN C E, et al. Correlation analysis of chaotic trajectories from Chua's system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 36(5): 1157-1169.
- [18] LIU Z, ZHU X H, HU W, et al. Principles of chaotic signal radar[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2007, 17(5): 1735-1739.

编 辑 张 俊