

小波采样的滤波算法研究

张治国, 黄建国, 刘震

(电子科技大学自动化工程学院 成都 610054)

【摘要】针对经典小波采样理论不能如同香农定理应用采样值对连续信号进行滤波, 该文在小波采样存在条件下, 提出一种基于采样值的小波滤波算法。该算法突破经典小波采样理论仅研究单个Hilbert空间信号重构的局限性, 从多分辨率逼近出发, 基于采样值构建信号逼近准则函数, 进而计算信号在小波空间的正交投影, 实现小波滤波。仿真试验证明该算法能够有效地基于采样值, 对连续信号进行小波滤波。

关键词 离散信号处理; 采样理论; 信号滤波; 小波分析

中图分类号 TP301.6

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.05.020

Wavelet Filtering Algorithm of Wavelet Sampling

ZHANG Zhi-guo, HUANG Jian-guo, and LIU Zhen

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract A new algorithm of wavelet sampling is proposed since the typical wavelet sampling lacks the capacity to filter the continuous signal by the samples as Shannon sampling does. From the viewpoint of Multiresolution approximation, a new cost function based on the samples is introduced to estimate the approximation of signal in this algorithm, so that the signal is decomposed into the orthogonal components, which has break through the limit of typical wavelet sampling that only considers the construction of signal in one Hilbert space.

Key words discrete signal processing; sampling theorem; signal filtering; wavelet analysis

随着计算机和数字化技术的发展, 采样理论成为现代信号处理的关键技术和重要基础。目前, 实践中普遍采用的 Whittaker-Kotel'nikov-Shannon 定理(香农定理)难以处理频域非紧支集(非频段有限)和非均匀采样信号, 应用受到极大限制。为解决上述问题, 广义采样理论得到迅速发展, 其中小波采样理论成为广义采样研究的重要分支^[1]。

由于小波采样(基于小波理论实现信号离散化)基于任何 $L^2(\mathbb{R})$ 子空间的理论^[2], 因此可以有效处理非频段有限采样问题。文献[3-5]分别利用核函数理论, 在不同的小波空间中, 提出小波采样存在(可以在相应小波空间实现信号离散化)的充要条件。此后, 小波采样的非均匀采样^[6-7]、平移不变性和多空间理论^[8-9]迅速发展, 并产生了针对各类特殊小波的采样理论^[10-13]。

尽管小波采样理论研究取得了许多重要成果, 然而与经典采样理论——香农定理相比, 小波采样理论依然有许多值得深入研究的问题, 如香农采样

的滤波性质。Possion 定理说明香农采样等同于信号的低通滤波, 因此香农采样不仅可以如同广义采样实现信号重构, 而且可以利用采样值, 实现信号特征提取和正交分解。该性质与香农函数作为特殊小波父函数, 具有多分辨率分析性质有密切关系, 因此小波采样完全可以具备同样性质。针对上述问题, 本文探讨小波采样的多空间性质, 提出一种快速计算方法, 在小波采样中利用采样值对信号进行小波滤波, 实现香农采样的类似性质。

1 小波采样的滤波问题

多分辨率分析就是指 $L^2(\mathbb{R})$ 中满足稠密性、平移不变性等 6 个性质的一组嵌套空间 $\{V_j\}_j$, 其中 $j \in \mathbb{Z}$ ^[14]。本文以逼近空间 V_0 中的信号作为讨论的对象, 但对于其他多分辨率逼近空间, 本文算法具有相同的有效性。由于香农函数张成的 Paley-Wiener 空间(P 空间)满足多分辨率分析条件, 因此香农采样本质上是小波采样, 使得香农采样与普

通小波采样存在许多共性。基于此, 本文通过香农采样分析小波采样滤波问题。

设信号 f_s 是 P 空间 V_0 中的元素, 其采样序列表示为:

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_s(n)\delta(t-n) \quad (1)$$

根据 Poisson 表达式, 采样序列的傅里叶变换为:

$$\hat{f}_s^d(w) = \sum_n \hat{f}_s(w-2n\pi) \quad (2)$$

式中 $\hat{f}_s(w)$ 表示 f_s 的傅里叶变换。由式(2)可知, 如果采样周期满足 Nyquist 频率, 那么 $\hat{f}_s^d(w)$ 的低频段与 $\hat{f}_s(w)$ 相同, 香农采样信号重构相当于在频段 $[-\pi, \pi]$ 上对 $\hat{f}_s^d(w)$ 进行低通滤波。然而从式(2)可以看出, 基于滤波观点, 香农采样不仅可以实现信号重构, 而且可以提取信号 f_s 的不同频率成分, 如通过低通滤波获取 f_s 在频段 $[-\pi/2, \pi/2]$ 的低频部分。基于小波理论, 相当于将 f_s 分解为两个分别属于小波空间 W_{-1} 与小波父函数空间 V_{-1} 的正交分量。因此, 香农采样滤波等价于信号的小波分解。

如果令 $f_j(t)$ 表示香农采样 f_s 在 $V_j \subset V_0$ ($j = -1, -2, \dots$) 上的正交分量, $\hat{f}_s^d(w)$ 低通滤波对应的时域表达式为:

$$f_j(t) = f_d(t) * \text{sinc}(2^j t) = \sum_n f_s(n/2^j) \text{sinc}(2^j t - n) \quad (3)$$

式中 $\text{sinc}(t)$ 表示香农函数; “*” 表示卷积算子。

由于式(3)中 $\{f_s(n/2^j)\}_n$ 是采样数据的子集, 因此式(3)是采样数据到 V_j 正交投影的线性映射。由此可知, 香农采样或者小波采样的滤波性质, 就是建立采样数据与正交分解量之间的映射关系, 利用采样值计算信号在 V_0 子空间 V_j 上的正交投影。

2 小波采样滤波算法准则函数

尽管基于 Poisson 表达式, 香农采样能够实现信号在多分辨分析的正交分解, 但对于普通的小波采样, 却没有与其相对应的理论, 与经典小波采样理论仅从单空间信号重构角度讨论小波采样理论存在密切关系。本文从信号逼近角度出发, 基于信号逼近准则函数, 获得信号的正交分解量。

2.1 准则函数表达式

准则函数就是基于采样值误差衡量函数逼近误差的标准。设在 $V_j \subset V_0$ 上的小波逼近级数为:

$$f_{ap}(t) = \sum_n c_n \phi_{j,n}(t) = \sum_n c_n \phi(2^j t - n) \quad (4)$$

式中 $\{\phi_{j,n}(t)\}_n$ 是空间 V_0 中的任意 Riesz 基。由于空间 V_j ($j \in Z$) 是 $L^2(R)$ 空间的子集, 因此信号与逼近函数的误差表示为:

$$\|f_{ap} - f_s\|_2^2 = \langle f_{ap} - f_s, f_{ap} - f_s \rangle \quad (5)$$

如果小波多分辨分析空间 V_0 存在小波采样, 根据 G G Walter 理论, 在 V_0 中一定存在正交基 $\{\gamma_k(t)\}_k$ 及插值小波构成的 Riesz 基 $\{\varphi_k(t)\}_k$ 。根据框架理论, $\{\varphi_k(t)\}_k$ 与 $\{\gamma_k(t)\}_k$ 之间存在一一线性映射, 即:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{-L}^L \lambda_l \gamma(t-l) \\ \gamma(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{-K}^K \xi_k \varphi(t-k) \end{cases} \quad (6)$$

设双无穷矩阵:

$$Q = \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} (q_{l,k})_{L \times K} \quad q_{l,k} = \lambda_{l-k}; \quad l, k \in Z \quad (7)$$

$$A = \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} Q_{K \times L}^T Q_{L \times K} \quad (8)$$

选用定义在 $l^2(R)$ 上的函数为算法的准则函数:

$$J_A(C) = C^T A C \quad C = [\dots c_{-1}, 0, c_1, \dots]^T \quad (9)$$

2.2 准则函数合理性分析

对 $J_A(C)$ 作为算法准则函数的正确性和合理性进行分析。

根据逼近理论, $J(C)$ 可以作为准则函数, 等同于它满足以下 3 个条件:

(1) 对于任何 $C \in l^2(R)$, $J(C) \geq 0$, 当且仅当 $C = 0$ 时, $J_A(C) = 0$ 。

(2) 对于任何 $C \in l^2(R)$, $J(C)$ 都存在, 即 $J(C) < +\infty$ 。

(3) $J(C)$ 与式(5)存在对应关系。

对 $J(C)$ 的合理性分析, 就是验证 $J(C)$ 是否满足上述 3 个条件。由式(8)可知, A 是 Hermitian 矩阵, 如果 $J(C)$ 满足第一个条件, 意味着 A 是正定矩阵, 引理 1 证明 A 确实满足正定矩阵的要求。

引理 1 A 是正定矩阵。

证明 设函数向量:

$$\varphi(x) = [\dots, \varphi(x+1), \varphi(x), \varphi(x-1), \dots]^T$$

$$\gamma(t) = [\dots, \gamma(x+1), \gamma(x), \gamma(x-1), \dots]^T$$

根据框架理论, 插值函数基 $\{\varphi_k(t)\}_k$ 与 $\{\gamma_k(t)\}_k$ 存在一一映射关系。根据式(6), 该映射关系可以表示为:

$$\varphi(x) = Q\gamma(t) \quad (10)$$

因此双无穷矩阵 Q 是线性有界可逆变换。由式(8)可知, A 也是线性有界可逆变换, 因此根据 Hermitian 矩阵性质, A 是正定矩阵。证毕。

作为准则函数, $J_A(C)$ 之所以需要满足第二个条件, 是因为经典小波采样理论的一个重要结论, 就是当小波采样存在时, 小波空间 V_0 中的元素与 $l^2(R)$ 空间中的元素存在一一映射关系, 任何属于 $l^2(R)$ 的采样值 $\{f_s(k)\}_k$, 都唯一确定 V_0 中的信号, 所以任何 $l^2(R)$ 中的元素都可以通过 $J_A(C)$ 计算确定相应的逼近误差。引理 2 证明 $J_A(C)$ 确实满足该条件。

引理 2 对于任何 $l^2(R)$ 中的元素 C 有:

$$J_A(C) = C^T A C < +\infty \quad (11)$$

证明 因为 A 是实 Hermitian 矩阵, 因此一定存在正交阵 P , 满足条件:

$$A = P^T \Delta P \quad (12)$$

式中 Δ 为对角矩阵。

将式(12)代入式(9), 可得:

$$J_A(C) = C^T A C = C^T P^T \Delta P C = D^T \Delta D \quad (13)$$

式中 $D = PC$ 。因为 P 是正交阵, 因此:

$$\|D\|_2^2 = (PC)^T PC = \|C\|_2^2 \quad (14)$$

式中 $\|\cdot\|_2^2$ 表示 l^2 的范数。

由于 A 是正定矩阵, 特征值均大于零, 因此将式(14)代入式(13)可得:

$$J_A(C) \leq K_{\text{sup}} D^T D = K_{\text{sup}} \|D\|_2^2 = K_{\text{sup}} \|C\|_2^2 < +\infty \quad (15)$$

式中 K_{sup} 表示 A 的最大特征值。证毕。

$J_A(C)$ 需要满足的第 3 个条件是本算法的关键。G G Walter 小波采样理论给出了小波采样存在的充分必要条件, 本文将进一步证明, 如果小波空间 V_0 中存在小波采样, 小波空间中的函数误差可以用函数 $J_A(C)$ 表示。因此 $J_A(C)$ 可以很好地满足准则函数的第 3 个条件。

引理 3 假设 $f_s(t)$ 和 $f_{ap}(t)$ 是 V_0 空间中的两个元素, 且 V_0 空间存在小波采样, 则:

$$\|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 = J_A(F_s - F_{ap}) \quad (16)$$

式中 F_s 与 F_{ap} 分别表示函数 $f_s(t)$ 和 $f_{ap}(t)$ 采样值组成的向量。

证明 由于 V_0 空间存在小波采样, 故 V_0 空间存在插值函数基 $\{\varphi_k(t)\}_k$, 且 $f_s(t)$ 和 $f_{ap}(t)$ 可表示为:

$$\begin{cases} f_s(t) = \sum_{k=1}^N f_s(k) \varphi_k(t) \\ f_{ap}(t) = \sum_{k=1}^N f_{ap}(k) \varphi_k(t) \end{cases} \quad (17)$$

意味着:

$$\|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 = \left\| \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \varphi_k(t) \right\|_2^2 \quad (18)$$

由于 $\{\varphi_k(t)\}_k$ 与 $\{\gamma_k(t)\}_k$ 存在一一映射关系, 因此将式(6)代入式(18)可得:

$$\begin{aligned} \|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 &= \left\| \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=-L}^L \lambda_l \gamma(t-k-l) \right\|_2^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \sum_l \lambda_{l-k} \gamma(t-h) \right|^2 dt = \\ &= \sum_l \left| \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lambda_{l-k} \right|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

另一方面:

$$\begin{aligned} Q(F_s - F_{ap}) &= [\dots, \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lambda_{\tau-1-k}, \\ &\sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lambda_{\tau-k}, \\ &\sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lambda_{\tau+1-k}, \dots]^T \end{aligned} \quad (20)$$

由于:

$$J_A(F_s - F_{ap}) = (F_s - F_{ap})^T Q^T Q (F_s - F_{ap}) = \sum_l \left| \sum_k (f_{ap}(k) - f_s(k)) \lambda_{\tau-k} \right|^2 \quad (21)$$

因此由式(19)和式(22)可得:

$$J_A(F_s - F_{ap}) = \|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 \quad (22)$$

证毕。

引理 3 证明 $J_A(C)$ 可以在采样值误差和函数误差之间建立起一一映射关系。结合引理 1、引理 2 和引理 3, 可知 $J_A(C)$ 可以作为本文算法的准则函数。

3 小波采样滤波计算

引理 3 还证明, 信号逼近误差可以通过准则函数转换为采样值误差。基于引理 3, 定理 1 将证明, 信号在 V_0 子空间上的正交投影是 V_0 子空间 V_j 中使准则函数减为最小的元素。

基于该重要结论, 本文提出相应算法, 基于采样值计算信号在 V_j 上正交分量的级数表达式式(4), 实现小波采样滤波。

定理 1 令 $f_{ap}(t)$ 表示小波子空间 $V_j \subset V_0$ 中的元素, f_s 表示 V_0 中的信号, 使 $J_A(F_s - F_{ap})$ 减为最小的 $f_{ap}(t)$, 一定是 f_s 在 V_j 上的投影。

证明 设 W 表示空间 V_j 在 V_0 的补集, 即 $V_0 = V_j \dot{+} W$; $P_{V_j} f_s$ 表示 f_s 在 V_j 上的投影,

$P_W f_s = f_s - P_{V_j} f_s$ 。由正交投影定理可知, $P_W f$ 垂直于 V_j , 而 $P_{V_j} f_s$ 和 $f_{ap}(t)$ 都属于 V_j , 所以:

$$\|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 = \|P_{V_j} f_s - f_{ap}(t) + P_W f_s\|_2^2 = \|P_{V_j} f_s - f_{ap}(t)\|_2^2 + \|P_W f_s\|_2^2 \quad (23)$$

由式(22)和式(23)可知:

$$\begin{aligned} & \|P_{V_j} f_s - f_{ap}(t)\|_2^2 + \|P_W f_s\|_2^2 = \\ & \|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2 = J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap}) \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24)可知, 减小 $J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap})$ 就相当于减小函数误差 $\|f_{ap}(t) - f_s(t)\|_2^2$ 。由于 $\|P_W f_s\|_2^2$ 是常数, 减小 $J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap})$ 相当于减小 $\|P_{V_j} f_s - f_{ap}(t)\|_2^2$, 因此 $J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap})$ 当且仅当 $\|P_{V_j} f_s - f_{ap}(t)\|_2^2 = 0$ 时, 减为最小, 此时有:

$$P_{V_j} f_s = f_{ap}(t) \quad (25)$$

证毕。

小波采样滤波, 就相当于利用采样数据计算信号在小波子空间上的正交投影, 定理 1 说明只要通过减小函数 $J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap})$ 就可以找到 f_s 在子空间 V_j 上的投影。由式(4)可知相当于计算一组小波系数 $\{c_k^0\}_k$ 满足:

$$\{c_k^0\}_k = \arg \min_{\{c_k\}_k} J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap}) \quad (26)$$

式(26)可以通过对 $J_A(\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_{ap})$ 求偏导数获得:

$$\frac{\partial J_A(f_s, f_{ap})}{\partial c_k} = 0 \quad (27)$$

由式(27)可得:

$$\Phi^T \Lambda \mathbf{F}_s = \Phi^T \Lambda \Phi \mathbf{C} \quad (28)$$

由于 $\mathbf{C}^T = [\dots, c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \dots]$, 双无穷矩阵 $\Phi = \{\phi_{j,l}(k)\}_{l,k}$ 。

由式(28)可知, 双无穷矩阵 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 是向量 \mathbf{C} 到 $\Phi^T \Lambda \mathbf{F}_s$ 的线性算子, 求取方程式(26)的解, 关键在于确定算子 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 是否可逆, 定理 2 证明如果 V_0 存在小波采样, V_j 是 V_0 的子集, 则算子 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 总是可逆的。

定理 2 如果 V_0 存在小波采样, V_j 是 V_0 的子集, 信号 f_s 是 V_0 的元素, $f_{ap}(t)$ 是 V_j 的元素, 则算子 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 总存在可逆算子。

证明 令 $\Phi^T \Lambda \Phi = [m_{k,l}]_{k,l}$ 及 $\phi_{j,k} = [\dots, \phi_{j,k}(l-1), \phi_{j,k}(l), \phi_{j,k}(l+1), \dots]^T$, 则:

$$m_{k,l} = \phi_{j,k}^T \Lambda \phi_{j,l} \quad (29)$$

显然, $\phi_{j,k}(t)$ 是 V_0 中的元素, 所以 $\phi_{j,k} \in l_A^2$ 。由引理 1~引理 3 可知:

$$m_{k,l} = \phi_{j,k}^T \Lambda \phi_{j,l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(t) \phi_{j,l}^*(t) dt = \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle \quad (30)$$

根据框架理论有:

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle \tilde{\phi}_{j,l}(t) \quad (31)$$

式中 $\tilde{\phi}_{j,l}(t)$ 表示 $\phi_{j,k}(t)$ 的对偶函数。将式(30)代入式(31)可得:

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} m_{k,l} \tilde{\phi}_{j,l}(t) \quad (32)$$

意味着 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 是从 $\{\phi_{j,k}(t)\}_k$ 到 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_k$ 的可逆算子。因为 $\{\phi_{j,k}(t)\}_k$ 和 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_k$ 都是 Riesz 基, 所以:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k \tilde{\phi}_{j,k}(t) = \\ & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_{j,k}(t) = \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\Phi}_j(t) = \mathbf{C}^T \Phi_j(t) \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)对任何 $f_s(t) \in V_j$ 成立。本文中

$$\begin{aligned} \Phi_j(t) &= [\dots, \phi_{j,k-1}(t), \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k+1}(t), \dots]^T, \tilde{\Phi}_j(t) = [\dots, \\ & \tilde{\phi}_{j,k-1}(t), \tilde{\phi}_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,k+1}(t), \dots]^T, \tilde{c}_k = \langle f_s, \phi_{j,k} \rangle, \\ & c_k = \langle f_s, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle. \end{aligned}$$

将式(32)代入式(33)可得:

$$\tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\Phi}_j(t) = \mathbf{C}^T \Phi_j(t) = \mathbf{C}^T \Phi^T \Lambda \Phi \tilde{\Phi}_j(t) \quad (34)$$

既然每个 $f_s \in V_j$ 都有唯一的展开式(33), 从式(34)可得:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \Lambda \Phi \mathbf{C} \quad (35)$$

另一方面, 因为 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 是从 $\{\phi_{j,k}(t)\}_k$ 到 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_k$ 的可逆算子, 有:

$$\mathbf{C}^T \Phi_j(t) = \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\Phi}_j(t) = \tilde{\mathbf{C}}^T (\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1} \Phi_j(t) \quad (36)$$

式中 $(\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1}$ 表示从 $\{\phi_{j,k}(t)\}_k$ 到 $\{\tilde{\phi}_{j,k}(t)\}_k$ 的可逆变换。同理可知:

$$\mathbf{C} = (\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \quad (37)$$

因为式(35)和式(36)对每个 $\{c_k\}_k$ 都成立, 因此 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 也是 $\{c_k\}_k$ 可逆算子。又因为式(33)对每个 $\{c_k\}_k \in l^2$ 成立, 因此式(35)和式(37)意味着在 l^2 中, 算子 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 总存在可逆算子。证毕。

因为由定理 2 可知 $\Phi^T \Lambda \Phi$ 是可逆线性算子, $\Phi^T \Lambda \Phi$ 总存在逆矩阵 $(\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1}$, 因此可由式(28)得到式(26)的解为:

$$\mathbf{C} = (\Phi^T \Lambda \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda \mathbf{F}_s \quad (38)$$

由式(38)可知, 如果知道采样值 \mathbf{F}_s 及函数基, 就可以计算出信号正交投影在式(4)中的系数, 进而获得

信号在空间 V_j 的正交投影, 实现信号滤波。

如果设式(4)中的小波父函数为香农函数, \mathbf{A} 为单位阵, 将 \mathbf{A} 与香农函数对应的矩阵 Φ 代入式(38), 计算可得式(3), 从另一方面证实了式(38)的正确性。

注意到式(4)中的 $\{\phi_k\}_k$ 是空间 V_0 的任意Riesz基, 因此本文算法以 V_0 存在插值基和正交基为前提条件, 但适用于任何小波父函数基。

4 算法仿真试验

4.1 仿真对象

仿真试验选用 5 阶样条小波多分辨分析作为仿真对象, 其对应的小波父函数 $\phi(t)$ 和小波 $\psi(t)$ 分别如图 1a 和图 1b 所示。由 G G Walter 相关理论可知 5 阶样条小波多分辨分析存在小波采样, 所以可以运用本文的相关算法对信号进行正交分解。

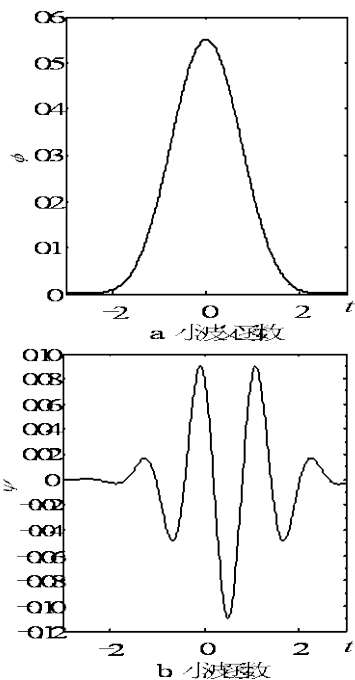


图1 5阶样条小波父函数及小波

设:

$$g_1 = \sum_{n=-5}^5 \sin(2n)\phi(2^{-1}t - n)$$

$$g_2 = \sum_{n=-5}^5 \cos(2n)\psi(2^{-1}t - n)$$

将函数 $f_s(t) = \frac{g_1}{\|g_1\|^2} + \frac{g_2}{\|g_2\|^2} = f_1 + f_2$ 作为仿真信

号, 试验区间为 $[-12, 12]$, 如图 2a 所示。由于 f_1 和 f_2 分别是小波父函数基 $\{\phi_k(t)\}_k$ 和小波基 $\{\psi_k(t)\}_k$ 的线性张成, 因此它们分别是 V_{-1} 和 W_{-1} 的元素, 其中 f_1 如图 2b 所示, f_2 如图 2c 所示。

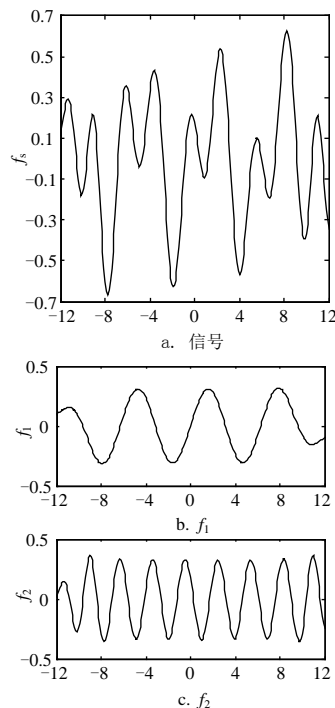


图2 信号及其组成成分

4.2 信号分解仿真结果

由小波理论可知, f_1 就是 f_s 在 V_{-1} 上的正交投影, 所以运用本文算法在空间 V_{-1} 和 W_{-1} 正交分解 f_s , 将式(38)得到的系数代入(4), $f_{ap}(t)$ 就应该等于 f_1 , 而 $\tilde{f}_{ap} = f_s - f_{ap}$ 就是 f_2 。

仿真结果如图 3 所示, 其中图 3a 是运用式(4)和式(38)计算得到的 f_s 在 V_{-1} 上的正交分解量, 图 3b 是相应的 f_s 在 W_{-1} 上的正交分解量, 图 3c 是运用本文算法计算得到在 V_{-1} 上的正交分解量 f_{ap} 与 f_1 的误差。对比图 2b 和图 2c、图 3a 和 3b, 可知运用本文算法得到的正交分解结果与信号的真实正交分解量几乎完全一样, 其中图 3c 中计算得到的 f_{ap} 与 f_1 的最大绝对误差为 2.0725×10^{-6} , 平均绝对误差为 7.6661×10^{-7} 。仿真结果之所以存在上述误差, 主要由 3 个原因造成: (1) 仿真中采用数值计算得到小波父函数和小波函数, f_1 与 f_2 只是近似正交, 因此算法获得的正交分解量不可能与 f_1 或 f_2 完全相同; (2) 由于仿真中 f_{ap} 采用数值表达式, 因此 f_{ap} 计算存在数值误差; (3) 运用式(4)与式(38)计算信号正交分解量需要从负无穷到正无穷的采样值, 而仿真中只采用了 $[-12, 12]$ 之间的采样值, 因此存在截断误差。从上面的分析可知, 如果除去数值计算误差和截断误差等因素, 仿真结果完全可以说明 f_{ap} 就是 f_1 。

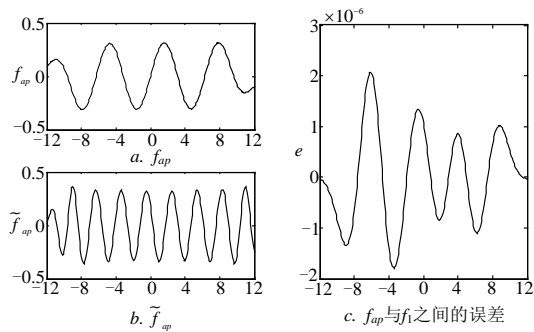


图3 信号分解结果

5 结论

基于小波采样的存在条件, 本文从多分辨分析逼近角度出发, 运用插值Riesz基与正交基之间的映射关系, 构建小波空间信号逼近准则函数, 利用采样值衡量信号逼近误差, 进而利用该准则函数提出相应的信号小波正交分解算法, 使得小波采样能够如同香农采样那样, 进行小波滤波。

由于该算法通过准则函数, 间接利用了小波采样的存在性条件和插值Riesz基, 因此该算法同样适用于普通的小波和小波父函数基, 使该算法与经典小波采样算法相比, 具有更大的适用性。

参考文献

- [1] VAIDYANATHAN P P. Generalizations of the sampling theorem: Seven decades after nyquist[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48 (9): 1094-1108.
- [2] ZHANG Yao. A method to reconstruct nth-order periodically nonuniform sampled[J]. Journal of Electronic Science and Technology, 2006, 2 (2): 15-18.
- [3] WALTER G G. sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1992, 38(2): 881-884.

- [4] NAOKI SAITO, BEYLKIN G. Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets[C]//Proceedings of the International Conference on Wavelets and Applications. Toulouse, France: Frontiers, 1992: 381-384.
- [5] NAOKI SAITO, BEYLKIN G. Multiresolution representations using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1993, 41(12): 3584-3590.
- [6] LIU You-ming. Irregular sampling for spline wavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory. 1996, 42(2): 623-627.
- [7] CHEN Wen, ITOH Shui-chi. Irregular sampling theorems for wavelet subspaces[J]. IEEE Transaction on Information Theory. 1998, 44 (2): 1131-1142.
- [8] WANG Qiao, WU Le-nan. Translation invariance and sampling theorem of wavelet[J]. IEEE Transaction Signal Processing. 2000, 48(5): 1471-1474.
- [9] LU Y M, MINH N D. A theory for sampling signals from a union of subspaces[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2008, 56 (6): 2334-2345.
- [10] DEVORE R A, KONGYAGIN S V, TEMLYAKOV V N. Hyperbolic wavelet approximation. Constructive Approximation, 1998, 14: 1-26.
- [11] SARDY S, DONALD B P, ANDREW G, et al. Wavelet shrinkage for unequally spaced data[J]. Statistics and Computing. 1999, 9: 65-75.
- [12] WANG Jian-zhong. Interpolating cubic spline wavelet packet on arbitrary partitions[J]. Journal of Computational Analysis and Applications. 2003, 5(1): 179-193.
- [13] ZHAO Chun, ZHAO Ping. Sampling theorem and irregular sampling theorem for multiwavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2005, 53(2I): 705-713.
- [14] MALLAT S. A wavelet tour of signal processing[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2003.

编辑 张俊