第 39 卷　第 6 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.39　No.6
2010年11月　　Journal of University of Electronic Science and Technology of China　　Nov. 2010

多级疲劳载荷作用下的应力−强度干涉模型

安宗文，郑　堃，黄建龙

(兰州理工大学机电工程学院　兰州　730050)

【摘要】为了评估多级疲劳载荷作用下的结构可靠性，假设结构初始强度为服从任意分布的随机变量，根据等损伤比剩余强度模型推导出多级疲劳载荷作用下的剩余强度表达式。利用通用生成函数法对剩余强度和疲劳载荷构成函数的概率特征进行计算，从而建立多级疲劳载荷作用下的应力−强度干涉模型。并利用45#钢疲劳试验数据对该模型的有效性进行验证。结果表明，该模型能够有效地评估多级疲劳载荷作用下的结构可靠度。

关　键　词　疲劳载荷；　模型建立；　可靠度；　剩余强度；　通用生成函数

中图分类号　TB114.3　　　**文献标识码**　A　　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2010.06.032

Stress-Strength Interference Model under Multi-Level Fatigue Loads

AN Zong-wen, ZHENG Kun, and HUANG Jian-long

(School of Mechatronics Engineering, Lanzhou University of Technology　Lanzhou　730050)

Abstract　In order to evaluate the structural reliability under multi-level fatigue loads, an expression of residual strength is derived from the equivalent damage ratio residual strength model and the assumption that the initial strength is a random variable of any distribution. Then a stress-strength interference model under multi-fatigue loads is proposed by employing the universal generating function to calculate the probability characteristics of a function constituted by fatigue loads and residual strength. The fatigue experimental data of $45^{\#}$ steel is used to testify the proposed model. The results indicate that the proposed model can be used to evaluate the structural reliability under multi-level fatigue loads.

Key words　fatigue load;　model building;　reliability;　residual strength;　universal generating function

应力−强度干涉(stress-strength interference，SSI)模型是结构可靠性分析的基本工具。该模型通常将结构应力和强度视为相互独立的随机变量，进而将结构可靠度定义为强度大于应力的概率。由于工程实际中结构应力和强度统计特征的复杂性、多样性，传统SSI模型在进行一些特定条件下的结构可靠性分析时，表现出一定的局限性。因此，许多研究人员考虑结构应力和强度的工程特点，研究了各类特定条件下的SSI模型。

文献[1]考虑应力与强度退化的相关性，研究了复合应力作用下强度退化的SSI模型。文献[2]建立了周期性随机应力作用下强度退化的SSI模型。文献[3]将SSI模型解释为载荷加权平均模型，提出随机恒幅循环载荷条件下的异量纲SSI模型.。文献[4]构造了具有一般意义的强度随机退化方程，提出随机载荷作用下的动态SSI模型及递推算法。文献[5-6]采用连续变量离散化的思想，提出离散型SSI模型和强度退化服从Gamma过程的SSI模型。文献[7]基于通用生成函数技术提出强度与应力单向相关的SSI模型。

多级疲劳载荷是工程实际中常见的一种载荷形式。为了评估多级疲劳载荷作用下的结构可靠度，本文将结构初始强度视为随机变量，根据文献[8]提出的等损伤比剩余强度模型，建立多级疲劳载荷作用下的SSI模型，进而利用$45^{\#}$钢的疲劳实验数据验证该模型的有效性。

1　通用生成函数法简介

文献[9]提出通用生成函数(universal generating function)，目前已广泛应用于多态系统可靠性分析[10-11]及工程结构可靠性分析[5-7]。本文简要介绍通用生成函数法的基本计算原理，有关通用生成函数的数学理论基础，可参考文献[11]。

假设 X 为离散型随机变量，其概率质量函数(probability mass function，pmf)由向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 表示为：

收稿日期：2009－06－12；修回日期：2010－01－05
基金项目：甘肃省高等学校基本科研业务费专项基金(GCJ2009019)
作者简介：安宗文(1968－)，男，博士，教授，主要从事结构可靠性理论及机电产品可靠性增长技术等方面的研究.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \\ \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_k) \end{cases} \tag{1}$$

根据通用生成函数法的基本原理，随机变量 X 的u-函数为：

$$u_X(z) = p_1 z^{x_1} + p_2 z^{x_2} + \cdots + p_k z^{x_k} = \sum_{j=1}^{k} p_j z^{x_j} \tag{2}$$

X 的u-函数形式上是关于变量 z 的多项式，它与 X 的pmf具有一一对应的关系。因此u-函数本质上仍是离散型随机变量概率特征的一种描述。

考虑 n 个相互独立的离散型随机变量 X_1、X_2、$\cdots$、X_n，以及由这些随机变量构成的任意函数 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。根据通用生成函数法，该函数的概率特征同样可由其u-函数表示。而且利用通用生成函数法定义的组合算子，离散函数 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的u-函数可通过对其自变量u-函数的运算得到。

设每个随机变量 X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的u-函数为：

$$u_{X_i}(z) = \sum_{j_i=1}^{k_i} p_{ij_i} z^{x_{ij_i}} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

则函数 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的u-函数为：

$$\begin{aligned} u_f(z) &= \otimes(u_{X_1}(z), u_{X_2}(z), \cdots, u_{X_n}(z)) = \\ &\otimes\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} p_{1j_1} z^{x_{1j_1}}, \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{2j_2} z^{x_{2j_2}}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{k_n} p_{nj_n} z^{x_{nj_n}}\right) = \\ &\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n}^{k_n} \left(\prod_{i=1}^{n} p_{ij_i} z^{f(x_{ij_1}, x_{ij_2}, \cdots, x_{ij_n})}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

式中　$\otimes$ 为通用生成函数法定义的组合算子。该算子本质上定义了对离散型随机变量进行运算的规则。简单而言，离散型随机变量u-函数的运算过程相似于普通多项式的乘法运算，多项式系数可直接相乘，但指数项严格按照函数 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的定义及属性运算(与普通多项式乘法运算完全不同)，运算过程中可以合并同类项。

2　多级疲劳载荷作用下的SSI模型

2.1　多级疲劳载荷

假定在役结构承受 k 级疲劳载荷的作用，疲劳载荷幅值分别为 S_1、S_2、$\cdots$、S_k，各级载荷作用的次数分别为 n_1、n_2、$\cdots$、n_k，k 级疲劳载荷按照1、2、$\cdots$、k 的确定顺序依次加载。

2.2　等损伤比剩余强度模型

文献[8]首先定义结构在疲劳载荷作用下的损伤比为剩余强度降低量与最大降低量的比值，进而认为两级疲劳载荷作用下的损伤状态相同是指两者的损伤比相等。两级载荷作用下，等损伤比模型的意义如图1所示。如果疲劳载荷 S_1 作用下的剩余强度沿 AB退化，疲劳载荷 S_2 作用下的剩余强度沿ACD退化，则载荷 S_2 作用 n_{21} 次的损伤比与载荷 S_1 作用 n_1 次的损伤比相同。

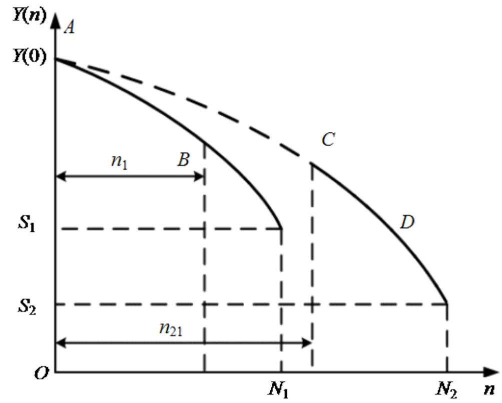

图1　两级载荷下等损伤比剩余强度模型

基于上述思想，文献[8]得到任意 k 级疲劳载荷条件下等损伤比剩余强度模型为：

$$Y\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) = Y(0) - \left[Y(0) - S_k\right]\left(\frac{n_{k1} + n_k}{N_k}\right)^{c_k} \tag{5}$$

$$n_{k1} = \begin{cases} N_k \left(\dfrac{Y(0) - Y\left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i\right)}{Y(0) - S_{k-1}} \right)^{\frac{1}{c_k}} & k \geqslant 2 \\ 0 & k = 1 \end{cases} \tag{6}$$

式中　$Y(0)$ 为结构初始静强度；k 为载荷当前级；n_i、N_i 分别为第 i 级载荷作用时的循环次数和循环寿命；S_k 为第 k 级载荷峰值；n_{k1} 是为了达到与第1级载荷作用 n_1 次相同的损伤比，第 k 级载荷需要作用的循环次数；c_k 为对应第 k 级载荷作用下的剩余强度退化参数。

式(5)及式(6)本质上提供了计算 k 级载荷作用下结构剩余强度的递归算法。若令 k 级载荷作用的总次数为 n，则有：

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{7}$$

结构在 k 级疲劳载荷作用下的剩余强度 $Y(n)$ 需要从 $Y(n_1)$、$Y(n_1 + n_2)$、$\cdots$、$Y(n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1})$ 依次递推计算而得。

通过上述迭代过程可得式(6)的另一种表达式为：

$$n_{k1} = \begin{cases} N_k \left(\left(\dfrac{n_{(k-1)1} + n_{k-1}}{N_{k-1}} \right)^{c_{k-1}} \right)^{\frac{1}{c_k}} & k \geqslant 2 \\ 0 & k = 1 \end{cases} \tag{8}$$

一般情况下，参数 n_i、N_i、c_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 均为已知量。因此，由式(8)递推计算得到的 n_{11}、n_{21}、$\cdots$、n_{k1} 可以视为一组常数，令：

$$C=\left(\frac{n_{k1}+n_k}{N_k}\right)^{c_k} \tag{9}$$

代入式(5)可得：

$$Y(n)=Y(0)-[Y(0)-S_k]C \tag{10}$$

考虑结构强度的不确定性，假设结构初始强度 $Y(0)$ 为随机变量，则由式(10)可知，多级疲劳载荷作用下的结构剩余强度 $Y(n)$ 也是服从某种分布的随机变量。

2.3 多级疲劳载荷作用下的SSI模型

根据 SSI 模型的基本思想，多级疲劳载荷作用下，结构动态可靠度为当前剩余强度大于当前作用载荷幅值的概率，即：

$$R(n)=\Pr\{Y(n)>S(n)\} \tag{11}$$

式中 n 为 k 级载荷作用的总次数；$Y(n)$ 为剩余强度；$S(n)$ 为当前作用载荷幅值。由于载荷作用的总次数在时间上对应最后一级(第 k 级)载荷的作用结束，因此 $S(n)=S_k$，代入式(11)可得：

$$R(n)=\Pr\{Y(n)>S_k\} \tag{12}$$

以下采用通用生成函数法求解上式表述的概率值。使用通用生成函数法求解上述概率值的关键在于求解剩余强度 $Y(n)$ 的u-函数。由式(10)可知，剩余强度 $Y(n)$ 与初始强度 $Y(0)$ 具有确定的函数关系，因此需要将连续型随机变量 $Y(0)$ 离散化，之后利用通用生成函数法计算 $Y(n)$ 的u-函数。

假设初始强度 $Y(0)$ 为分布已知的连续型随机变量。首先根据结构的实际工况条件确定其近似有界区间 $\langle Y(0)_{\min}, Y(0)_{\max}\rangle$；将该区间划分为若干个子区间，以每个子区间的中点值作为离散型初始强度 $Y(0)$ 的一个可能取值，以每个子区间上概率密度曲线所包含的面积为该可能取值对应的概率值，便可将已知概率密度函数的连续型随机变量近似转化为已知pmf的离散型随机变量。

将初始强度 $Y(0)$ 的近似有界区间划分为任意 m 个子区间，则其pmf为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_0=(y_{01},y_{02},\cdots,y_{0m})\\ \boldsymbol{p}_0=(p_{01},p_{02},\cdots,p_{0m})\\ p_{0i}=\Pr\{Y(0)=y_{0i}\} \quad i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{13}$$

根据式(2)，初始强度 $Y(0)$ 的u-函数为：

$$u_{Y(0)}=\sum_{j=1}^{m}p_{0j}z^{y_{0j}} \tag{14}$$

由于式(10)中 S_k 和 C 均为常量，将它们视为取值确定(对应概率为1)的特殊随机变量，则它们的u-函数分别为：

$$\begin{cases}u_{S_k}(z)=z^{S_k}\\ u_C(z)=z^C\end{cases} \tag{15}$$

为了求解剩余强度 $Y(n)$，定义离散函数 $f(Y(0),S_k,C)$ 为：

$$f(Y(0),S_k,C)=(Y(0)-S_k)C \tag{16}$$

将式(14)、式(15)代入式(16)，可得函数 $f(Y(0),S_k,C)$ 的u-函数为：

$$\begin{aligned}u_f(z)&=\otimes(u_{Y(0)}(z),u_{S_k}(z),u_C(z))=\\&\otimes(\sum_{j=1}^{m}p_{0j}z^{y_{0j}},z^{S_k},z^C)=\\&\sum_{j=1}^{m}p_{0j}z^{f(y_{0j},S_k,C)}\end{aligned} \tag{17}$$

将式(17)、式(14)代入式(4)，可得剩余强度 $Y(n)$ 的u-函数为：

$$\begin{aligned}u_{Y(n)}(z)&=\otimes(u_{Y(0)}(z),u_f(z))=\\&\otimes(\sum_{j_1=1}^{m}p_{0j_1}z^{y_{0j_1}},\sum_{j_2=1}^{m}p_{0j_2}z^{f(y_{0j_2},S_k,C)})\end{aligned} \tag{18}$$

根据通用生成函数法的基本原理可知，式(18)的最终形式仍为多项式。不失一般性，将其记为：

$$u_{Y(n)}(z)=\sum_{i=1}^{K}P_iz^{y_{ni}} \tag{19}$$

式中 y_{ni} 和 $P_i(i=1,2,\cdots,K)$ 分别为剩余强度 $Y(n)$ 的所有可能取值及其对应的概率值；K 为所有可能取值的个数。由于利用通用生成函数法进行计算时允许合并同类项，因此 $K\leqslant m^2$。

将式(19)表示的多项式中指数大于 S_k 的各项系数求和，可得式(12)表示的概率值，即结构可靠度。为描述方便，定义示性函数为：

$$\alpha(y_{ni})=\begin{cases}1 & y_{ni}>S_k\\ 0 & y_{ni}\leqslant S_k\end{cases} \tag{20}$$

则式(12)可表述为：

$$R(n)=\sum_{i=1}^{K}P_i\alpha(y_{ni}) \tag{21}$$

称为多级疲劳载荷作用下的 SSI 模型。

3 算例分析

45#钢初始强度(静强度)服从正态分布，均值为 $\mu_{Y(0)}=833.6$ MPa，标准差为 $\sigma_{Y(0)}=8.336$ MPa。分别在3级疲劳载荷作用下对试件进行疲劳寿命试验，结果如表1所示[12]。

表1 45#钢疲劳试验数据

疲劳载荷幅值/MPa	循环寿命	剩余强度退化参数
$S_1=278$	$N_1=1.646\times10^5$	$c_1=4.186$
$S_2=395$	$N_2=4.928\times10^3$	$c_2=3.902$
$S_3=317$	$N_3=3.220\times10^4$	$c_3=4.092$

假设由45#钢制造的机械零件工作中承受上述3级疲劳载荷的作用，加载次序为S_1、S_2、S_3，各级载荷的工作循环次数分别为$n_1=30\ 000$、$n_2=2\ 500$、$n_3=10\ 200$。计算3级疲劳载荷作用结束时的零件可靠度。

将初始强度$Y(0)$进行离散化，确定其近似区间为$\langle\mu_{Y(0)}-3\sigma_{Y(0)},\mu_{Y(0)}+3\sigma_{Y(0)}\rangle$，并将该区间均匀划分为6个子区间；以每个子区间的中点值为初始强度的1个可能取值，以每个子区间上概率密度曲线所包含面积为该取值对应的概率，可得离散化初始强度的pmf为：

$$\boldsymbol{y}_0=(812.8,821.1,829.4,837.8,846.1,854.4)$$

$$\boldsymbol{p}_0=(0.02,0.14,0.34,0.34,0.14,0.02)$$

根据式(14)，初始强度$Y(0)$的u-函数为：

$$u_{Y(0)}(z)=0.02z^{812.8}+0.14z^{821.1}+0.34z^{829.4}+0.34z^{837.8}+0.14z^{846.1}+0.02z^{854.4}$$

将各级载荷工作循环次数及剩余强度退化参数代入式(8)可得，$n_{11}=0$、$n_{21}=793$、$n_{31}=21\ 923$。进而根据式(9)可得$C=0.99$。

由零件的加载顺序可知，最后作用的载荷是S_3，因此，$S_k=S_3$。

由式(15)可得C和S_3的u-函数分别为：

$$u_{S_3}(z)=z^{317}$$

$$u_C(z)=z^{0.99}$$

将$u_{Y(0)}(z)$、$u_{S_3}(z)$、$u_C(z)$代入式(17)，可得离散函数$f(Y(0),S_k,C)$的u-函数为：

$$u_f(z)=\otimes(u_{Y(0)}(z),u_{S_3}(z),u_C(z))=0.02z^{490.8}+0.14z^{499.1}+0.34z^{507.3}+0.34z^{515.6}+0.14z^{523.8}+0.02z^{532.0}$$

将$u_{Y(0)}(z)$、$u_f(z)$代入式(18)，可得剩余强度$Y(n)$的u-函数为：

$$\begin{aligned}u_{Y(n)}(z)=\otimes(u_{Y(0)}(z),u_f(z))=\\
0.000\ 4z^{322.0}+0.002\ 8z^{313.7}+0.006\ 8z^{305.5}+\\
0.006\ 8z^{297.2}+0.002\ 8z^{289.0}+0.006\ 8z^{280.8}+\\
0.002\ 8z^{330.3}+0.019\ 6z^{322.0}+0.047\ 6z^{313.8}+\\
0.047\ 6z^{305.5}+0.019\ 6z^{297.3}+0.002\ 8z^{289.1}+\\
0.006\ 8z^{338.6}+0.047\ 6z^{330.3}+0.115\ 6z^{322.1}+\\
0.115\ 6z^{313.8}+0.047\ 6z^{305.6}+0.006\ 8z^{297.4}+\\
0.006\ 8z^{347.0}+0.047\ 6z^{338.7}+0.115\ 6z^{330.5}+\\
0.115\ 6z^{322.2}+0.047\ 6z^{314.0}+0.006\ 8z^{305.8}+\\
0.002\ 8z^{355.3}+0.019\ 6z^{347.0}+0.047\ 6z^{338.8}+\\
0.047\ 6z^{330.5}+0.019\ 6z^{322.3}+0.002\ 8z^{314.1}+\\
0.000\ 4z^{363.6}+0.002\ 8z^{355.3}+0.006\ 8z^{347.1}+\\
0.006\ 8z^{338.8}+0.002\ 8z^{330.6}+0.006\ 8z^{322.4}\end{aligned}$$

根据式(21)可知，该零件在3级疲劳载荷作用结束时(载荷作用总次数为$n_1+n_2+n_3=42\ 700$)的可靠度$R(42\ 700)$为：

$$\begin{aligned}R(42\ 700)=\sum_{i=1}^{K}P_i\alpha(y_{ni})=\\
0.000\ 4+0.002\ 8+0.019\ 6+0.006\ 8\\
0.047\ 6+0.115\ 6+0.006\ 8+0.047\ 6+\\
0.115\ 6+0.115\ 6+0.002\ 8+0.019\ 6+\\
0.047\ 6+0.047\ 6+0.019\ 6+0.000\ 4+\\
0.002\ 8+0.006\ 8+0.006\ 8+0.002\ 8+\\
0.000\ 4=0.635\ 6\end{aligned}$$

由上述计算过程可知，当3级疲劳载荷作用结束时，常数$C=0.99$。根据式(10)可知，此时零件的剩余强度已经非常接近当前(第3级)疲劳载荷幅值S_3，零件可靠度处于较低水平。因此，该算例中零件可靠度计算结果与实际工况比较吻合。

4 结 论

本文考虑按确定顺序加载的多级疲劳载荷作用及结构初始强度的随机性，利用等损伤比剩余强度模型及通用生成函数法建立多级疲劳载荷作用下的SSI模型，为特定条件下结构疲劳可靠度分析与评估提供应用依据。应用案例验证了该模型的有效性。由于通用生成函数法具有程式化的运算规则，便于编程计算，因此本文提出的SSI模型具有计算简便的特点，易于工程应用。

参 考 文 献

[1] 孙 权, 赵建印, 周经伦. 复合应力作用下强度退化的应力-强度干涉模型可靠性统计分析[J]. 计算力学学报, 2007, 24(3): 358-361.
SUN Quan, ZHAO Jian-yin, ZHOU Jing-lun. Stress-strength interference reliability analysis considering stochastic multi-stress and strength aging degradation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(3): 358-361.

[2] 赵建印, 孙 权, 周经伦. 周期性随机应力强度退化下的SSI可靠性模型研究[J]. 应用科学学报, 2006, 24(5): 529-532.

ZHAO Jian-yin, SUN Quan, ZHOU Jing-lun. Stress-strength interference reliability analysis considering cyclic stochastic stress and strength aging degradation[J]. Journal of Applied Sciences, 2006, 24(5): 529-532.

[3] 谢里阳, 王 正. 随机恒幅循环载荷疲劳可靠度异量纲干涉模型[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 1-6.
XIE Li-yang, WANG Zheng. Dissimilar-dimension interference model of fatigue reliability under uncertain cyclic load[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 1-6.

[4] HUANG W, ASKIN R G. A generalized SSI reliability model considering stochastic loading and strength aging degradation[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2004, 53(1): 77-82.

[5] AN Z W, HUANG H Z, LIU Y. A discrete stress–strength interference model based on universal generating function[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(10): 1485-1490.

[6] AN Z W, HUANG H Z, WANG Z L. A time-dependent stress-strength interference model with strength degradation following a gamma process[C]//Proceedings of 14th International Conference on Reliability and Quality in Design. Piscataway: International Society of Science and Applied Technologies. 2008: 270-273.

[7] HUANG H Z, AN Z W. A discrete stress-strength interference model with stress dependent strength[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2009, 58(1): 118-122.

[8] 敖 波, 张定华, 赵歆波, 等. 多级载荷作用下剩余强度的估算[J]. 机械强度, 2007, 29(3): 463-467.
AO Bo, ZHANG Ding-hua, ZHAO Xin-bo, et al. Estimation of residual strength under multi-level loads[J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(3): 463-467.

[9] USHAKOV I. A universal generating function[J]. Soviet Journal of Computer and Systems Sciences, 1986, 24(5): 118-129.

[10] LISNIANSKI A, LEVITIN G. Multi-state system reliability. assessment, optimization and applications[M]. Singapore: World Scientific, 2003.

[11] LEVITIN G. The universal generating function in reliability analysis and optimization[M]. London: Springer, 2005.

[12] 姚卫星. 结构疲劳寿命分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003: 215-220.
YAO Wei-xing. Fatigue life prediction of structure[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 215-220.

编 辑 黄 莘

(上接第955页)

[9] MOURELATOS Z P, ZHOU J. A design optimization method using evidence theory[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4): 901-908.

[10] DU L, CHOI K K, YOUN B D, et al. Possibility-based design optimization method for design problems with both statistical and fuzzy input data[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4): 928-935.

[11] 郭书祥, 张 陵, 李 颖. 结构非概率可靠性指标的求解方法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(2): 227-231.
GUO Shu-xiang, ZHANG Ling, LI Ying. Procedure for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain structures[J]. Chinese Journal of Computation Mechanics, 2005, 22(2): 227-231.

[12] LAUMAKIS P J, HARLOW G. Structural reliability and monte carlo simulation[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2002, 33: 377-387.

[13] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second-moment code format[J]. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, 100(EM1): 111-121.

[14] HOHENBICHLER M, GOLLWITZER S, KRUSE W, et al. New light on first- and second-order reliability methods[J]. Structural Safety, 1987, 4: 267-284.

[15] SOMMER A M, NOWAK A S, THOFT-CHRISTENSEN P. Probability-based bridge inspection strategy[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119: 3520-3536.

编 辑 黄 莘