·机械电子工程·

区间参数智能梁结构闭环系统动态特性分析

王敏娟[1]，陈建军[1]，林立广[2]，贾爱芹[1]，魏永祥[1]

(1. 西安电子科技大学机电工程学院　西安　710071;　2. 中国兵器工业第203研究所　西安　710061)

【摘要】以区间参数压电智能梁结构为研究对象，建立了基于位移反馈控制结构闭环系统动态特性分析的有限元模型。在材料物理参数和几何尺寸等为区间变量时，分析了结构质量矩阵和刚度矩阵的不确定性。并从求解结构振动动态特性的Rayleigh商出发，利用区间变量运算法则推导出了结构闭环系统固有频率的数字特征表达式。通过算例，考察了区间参数对结构固有频率特性的影响，并验证了所建模型和方法的可行性与合理性。研究结果表明，利用区间系数分析法来研究压电智能梁结构闭环系统的动态特性具有一定的工程应用价值。

关　键　词　闭环系统;　区间运算法则;　区间系数;　动态特性分析;　压电智能梁

中图分类号　O324　　**文献标识码**　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.01.029

Dynamic Characteristic Analysis of Closed Loop Systems for the Intelligent Beam with Interval Parameters

WANG Min-juan[1], CHEN Jian-jun[1], LIN Li-guang[2], JIA Ai-qin[1], and WEI Yong-xiang[1]

(1. School of Electromechanical Engineering, Xidian University　Xi'an　710071;

2. No.203 Research Institute of China Ordnance Industries　Xi'an　710061)

Abstract　Piezoelectricity intelligent beam structures with interval parameters are researched in this paper. The finite element modeling of structural close loop systems for dynamic characteristic analysis is established by displacement feedback control method. The uncertainty of mass matrix and stiffness matrix are analyzed when the structural physical parameters and geometric dimensions etc are interval variables. The computation expression of structural natural frequency of close loop systems is obtained by employing Rayleigh quotient and interval algorithms. The effects of the uncertainty of structural interval parameters on structural natural frequency are inspected. In addition, the modeling and the method presented in this paper are verified through an example. The results illustrate that the interval coefficient method has important engineering value in dealing with the dynamic characteristic of close loop systems of the intelligent beam.

Key words　close loop system;　dynamic characteristic analysis;　interval algorithms;　interval coefficient;　piezoelectricity intelligent beam

随着现代科学技术的发展，越来越多的压电材料被广泛应用于各种智能结构系统中。为此，对含有压电材料的智能结构系统进行动态特性分析尤为重要。文献[1]建立含压电传感器和执行器的智能结构平面梁单元模型，分析了在无外力而只有外电场作用下梁的静力位移响应。文献[2]分析了具有分布压电传感器和执行器的4边简支方板在开、闭环状态下的动态特性，讨论了模态形状和相应的模态电压以及各阶固有频率随反馈增益的变化情况。文献[3]采用随机因子法分析了随机参数智能结构的动力特性。文献[4]针对压电智能梁结构，采用6个位移自由度、2个电自由度的有限元模型，分析了随机参数压电智能梁结构的开环动态特性。然而，迄今为止，智能结构动力分析几乎均属于确定性模型和概率模型，关于区间参数智能梁结构闭环动态特性分析的文献少有报道。

由于区间分析方法只需要给定参数取值的上下限范围即可，且可以保留信息的完整性，故近年来利用区间方法进行结构分析的研究日益受到重视，如文献[5-11]分别研究了区间参数结构的特征值、动力响应分析、动力优化、可靠性问题、误差分析等问题。

收稿日期：2009－10－26;　修回日期：2010－04－03

基金项目：国家863计划(2006AA04Z402)

作者简介：王敏娟 (1982－)，女，博士生，主要从事机电系统智能控制方面的研究.

本文以压电智能梁结构为研究对象，采用位移反馈控制规律建立了结构闭环系统的有限元运动微分方程；利用区间系数法分析了结构物理参数和几何尺寸分别或同时为区间变量时对结构闭环系统动态特性的影响；并通过算例与区间变量取区间均值时的确定性模型进行了比较。结果表明，基于区间系数法处理压电智能梁结构闭环动态特性是一种较方便、可行而合理的方法。

1　闭环系统智能梁结构的动力学有限元方程

考虑长为L、宽为w、厚为H且各向同性的平面弹性梁，其上下表面均匀地粘贴一层厚度均为h的压电片，上表面的传感层和下表面的致动层采用相同的材料。整个梁沿轴线方向被离散为若干个单元，相邻两个单元上的压电片电极之间彼此绝缘，并假设一个压电片只有两个电自由度。令其单元外加作用载荷$\boldsymbol{F}_p^e=\boldsymbol{0}$，单元阻尼矩阵$\boldsymbol{C}^e=\boldsymbol{0}$，则由Hamilton原理和变分运算可推导出单元的动力学微分方程为：

$$\boldsymbol{M}^e\ddot{\boldsymbol{u}}^e+(\boldsymbol{K}_m^e+\boldsymbol{K}_p^e)\boldsymbol{u}^e-\boldsymbol{K}_{ma}^e\boldsymbol{V}_{aa}^e-\boldsymbol{K}_{ms}^e\boldsymbol{V}_{ss}^e=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{K}_{am}^e\boldsymbol{u}^e+\boldsymbol{K}_{aa}^e\boldsymbol{V}_{aa}^e=-\iint_{A^e}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{aa}^e\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

$$\boldsymbol{K}_{sm}^e\boldsymbol{u}^e+\boldsymbol{K}_{ss}^e\boldsymbol{V}_{ss}^e=-\iint_{A^e}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s^e\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

式中：

$$\boldsymbol{M}^e=\sum_{i=m,s,a}\int_{V_i^e}\rho\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_m^e=E_m\int_{V_m^e}\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_u\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_P^e=E_p\int_{V_s^e+V_a^e}\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_u\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{ma}^e=\boldsymbol{K}_{am}^{e\ \mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_{ms}^e=\boldsymbol{K}_{sm}^{e\ \mathrm{T}}=\int_{V_{a,s}^e}(\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}e_{31}/h)\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{K}_{aa}^e=\boldsymbol{K}_{ss}^{e\ \mathrm{T}}=\int_{V_{a,s}^e}(e_{33}^e/h^2)\mathrm{d}V \tag{4}$$

$\boldsymbol{u}^e$、$\ddot{\boldsymbol{u}}^e$分别为结构的位移和加速度响应列阵；$\boldsymbol{M}^e$为结构的单元质量矩阵；$\boldsymbol{K}_m^e$、$\boldsymbol{K}_p^e$分别为基梁和压电层的单元刚度矩阵；$\boldsymbol{V}_{aa}^e$、$\boldsymbol{V}_{ss}^e$分别为单元压电致动层和传感层上的电压；$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_a^e$、$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s^e$分别为单元致动层和传感层的外加电荷面密度；$\boldsymbol{A}^e$为单元致动层或传感层的表面积；$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}_u$分别为单元的形函数矩阵和应变矩阵；$\rho$为基梁或压电层材料的密度；$e_{31}$为压电系数；$e_{33}^e$为压电片介电常数；其中下标$s$、$a$、$m$分别表示压电传感层、致动层和基梁部分。

设其传感层上的电压为零，利用压电传感层上的正压电效应，由式(3)可得仅有智能梁结构变形引起的输出电压为：

$$\boldsymbol{V}_{ss}^e=-\boldsymbol{K}_{ss}^{e\ -1}\boldsymbol{K}_{sm}^e\boldsymbol{u}^e \tag{5}$$

由文献[12]及式(1)～式(3)可推得压电致动层表面的电荷密度产生的节点力为：

$$\boldsymbol{F}_a^e=-\boldsymbol{K}_{am}^e\boldsymbol{K}_{aa}^{e\ -1}\int\int_{A^e}\frac{\zeta}{h}\boldsymbol{V}_{aa}^e\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

式中，ζ为压电体的绝对介电常数。

考虑位移反馈控制对结构振动控制与抑制的作用，利用输入到压电致动层的反馈电压与压电传感层的输出电压成正比例的关系可得：

$$\boldsymbol{V}_{aa}^e=\boldsymbol{G}\boldsymbol{V}_{ss}^e=-\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}_{ss}^{e\ -1}\boldsymbol{K}_{sm}^e\boldsymbol{u} \tag{7}$$

将式(4)～式(7)代入式(1)，则经单元组集可得智能梁结构闭环系统的动力学有限元微分方程为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{8}$$

式中：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_m+\boldsymbol{M}_p \tag{9}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_m+\boldsymbol{K}_p+\boldsymbol{K}_{ma}\boldsymbol{K}_{aa}^{-1}\boldsymbol{K}_{am}+\boldsymbol{K}_{ms}\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{sm}-\boldsymbol{K}_{ma}\boldsymbol{K}_{aa}^{-1}\zeta wl\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{sm}/h \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{G}$为位移反馈增益矩阵。

2　区间参数压电智能梁结构的不确定性分析

2.1　区间分析法

设$\boldsymbol{R}$为实数域，对于给定的实数X^l，$X^u\in\boldsymbol{R}$，且$X^l\leqslant X^u$，则有：

$$X^I=[X^l,X^u]=\{X:X\in\boldsymbol{R},X^l\leqslant X\leqslant X^u\} \tag{11}$$

式中，X^I为有界闭区间；X^l、X^u为区间变量X的上下界；$X^c=(X^l+X^u)/2$为区间X^I的均值或中间点；$X^r=(X^u-X^l)/2$为区间X^I的离差或半径。令$\delta=X^r/X^c=(X^u-X^l)/(X^l+X^u)$为区间$X^I$的区间变化率，令$\eta=X^I/X^c$为区间系数，则$X^I=\eta X^c$，$\eta\in(X^l/X^c,X^u/X^c)$，可知$\eta$的均值为1。由此可见，区间系数$\eta$描述了区间变量$X^I$的不确定性，对任意已知上下界的区间参数而言，均可求出其相应的区间系数。

2.2　区间参数智能梁结构的质量矩阵与刚度矩阵的建立

本文考虑智能梁结构的所有物理参数和几何尺寸均为区间变量的最一般情况，且梁结构中的压电材料(传感层和致动层)为同一种材料。利用区间系数，则结构的区间物理参数为$\rho_m=\lambda_1\rho_p=\eta_\rho\rho^c$，$E_m=\lambda_3E_p=\eta_EE^c$，$e_{31}=\eta_{e_{31}}e_{31}^c$，$e_{33}^e=\eta_{e_{33}^e}(e_{33}^e)^c$，

$\xi=\eta_\xi\xi^c$；而结构的区间几何参数为 $L=\eta_L L^c$，$H=\lambda_2 h=\eta_H H^c$，$w=\eta_w w^c$；相应区间增益矩阵为 $\boldsymbol{G}=\eta_G\boldsymbol{G}^c$，其中 η_ρ、η_E、$\eta_{e_{31}}$、$\eta_{e_{33}^e}$、η_ξ、η_L、η_H、η_w、η_G 为压电智能梁结构物理参数和几何参数的区间系数，ρ^c、E^c、e_{31}^c、$(e_{33}^e)^c$、L^c、H^c、w^c、ξ^c 为相应的区间均值，λ_1、λ_3、λ_3 为比例常数。由区间变量、区间系数以及区间均值的对应关系，将弹性体、压电材料的物理参数和几何参数从式(9)～式(10)中提出，即可得到关于区间参数压电智能梁结构的总质量和总刚度矩阵分别为：

$$\boldsymbol{M}=\eta_\rho\eta_H\eta_w[\boldsymbol{M}_m^*+\boldsymbol{M}_p^*/(\lambda_1\lambda_2)] \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}=&\eta_E\eta_w[\boldsymbol{K}_m^*+\boldsymbol{K}_p^*/(\lambda_3)]+\frac{\eta_{e_{31}}{}^2\eta_w}{\eta_{e_{33}^e}}\times\\&2[\boldsymbol{K}_{ma}^*+\boldsymbol{K}_{ms}^*]-\frac{\eta_{e_{31}}{}^2\eta_\xi\eta_G\eta_w}{\eta_{e_{33}^e}^2}\boldsymbol{K}_G^*=\\&[\eta_E\eta_w[\boldsymbol{K}_m^*+\boldsymbol{K}_p^*/\lambda_3]+\frac{\eta_{e_{31}}{}^2\eta_w}{\eta_{e_{33}^e}}\times\\&(2[1,1]-\frac{\eta_\xi\eta_G}{\eta_{e_{33}^e}})[\boldsymbol{K}_{p1}^*])]\end{aligned} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{p_1}^*=\boldsymbol{K}_{ma}^*=\boldsymbol{K}_{ms}^*=\boldsymbol{K}_G^*$，其中 $\boldsymbol{M}_m^*$、$\boldsymbol{M}_p^*$、$\boldsymbol{K}_m^*$、$\boldsymbol{K}_p^*$、$\boldsymbol{K}_G^*$ 分别为各区间系数取均值时弹性体和压电体的总质量、总刚度矩阵以及位移反馈矩阵的确定性部分。

根据区间运算法则[13]，可以得出以下关系式的变换：

$$\begin{aligned}\frac{\eta_{e_{31}}^2}{\eta_{e_{33}^e}}=&[\min\{\eta_{e_{31}}^l\eta_{e_{31}}^l,\eta_{e_{31}}^l\eta_{e_{31}}^u,\eta_{e_{31}}^u\eta_{e_{31}}^u\},\\&\max\{\eta_{e_{31}}^l\eta_{e_{31}}^l,\eta_{e_{31}}^l\eta_{e_{31}}^u,\eta_{e_{31}}^u\eta_{e_{31}}^u\}]\times\\&[1/\eta_{e_{33}^e}^u,1/\eta_{e_{33}^e}^l]\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta_\xi\eta_G}{\eta_{e_{33}^e}}=&[\min\{\eta_\xi^l\eta_G^l,\eta_\xi^l\eta_G^u,\eta_\xi^u\eta_G^l,\eta_\xi^u\eta_G^u\},\\&\max\{\eta_\xi^l\eta_G^l,\eta_\xi^l\eta_G^u,\eta_\xi^u\eta_G^l,\eta_\xi^u\eta_G^u\}]\times\\&[1/\eta_{e_{33}^e}^u,1/\eta_{e_{33}^e}^l]\end{aligned} \tag{15}$$

令 $\eta_{E1}=\dfrac{\eta_{e_{31}}{}^2}{\eta_{e_{33}^e}}\left(2[1,1]-\dfrac{\eta_\xi\eta_G}{\eta_{e_{33}^e}}\right)$、$\eta_{E2}=\dfrac{\eta_{e_{31}}{}^2}{\eta_{e_{33}^e}}$、$\eta_{E3}=\dfrac{\eta_\xi\eta_G}{\eta_{e_{33}^e}}$，则由式(14)～式(15)可得：

$$\begin{aligned}\eta_{E1}=&[\min\{\eta_{E_2}^l(2-\eta_{E_3}^l),\eta_{E_2}^l(2-\eta_{E_3}^u),\\&\eta_{E_2}^u(2-\eta_{E_3}^l),\eta_{E_2}^u(2-\eta_{E_3}^u)\},\\&\max\{\eta_{E_2}^l(2-\eta_{E_3}^l),\eta_{E_2}^l(2-\eta_{E_3}^u),\eta_{E_2}^u(2-\eta_{E_3}^l),\\&\eta_{E_2}^u(2-\eta_{E_3}^u)\}]\end{aligned} \tag{16}$$

式中，$\eta_{E_2}^l$、$\eta_{E_2}^u$，$\eta_{E_3}^l$、$\eta_{E_3}^u$ 分别为区间参数 η_{E_2}、η_{E_3} 的最大值和最小值。令 $\eta_E=\lambda_4\eta_{E_1}$，$\lambda_4$ 为比例常数，则区间参数压电智能梁结构的总刚度矩阵式(13)可表示为：

$$\boldsymbol{K}=\eta_E\eta_w(\boldsymbol{K}_m^*+\boldsymbol{K}_p^*/\lambda_3+\boldsymbol{K}_{p1}^*/\lambda_4) \tag{17}$$

3 区间参数智能梁结构闭环动态特性的数字特征

对结构动态特性的分析涉及到各阶固有频率和所对应的固有振型向量，两者为一一对应关系，且完全正相关。因此，确定了结构的每一阶固有频率，也就确定了与之相对应的振型，故只需分析结构的固有频率。将式(12)、式(17)代入结构动力学的Rayleigh商表达式，即有：

$$\omega_i^2=\{\boldsymbol{X}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{X}\}_i/\{\boldsymbol{X}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{X}\}_i$$

可得：

$$\begin{aligned}\omega_i^2=&\frac{\eta_E\eta_w\{\boldsymbol{\phi}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_m^*+\frac{1}{\lambda_3}\boldsymbol{K}_p^*+\frac{1}{\lambda_4}\boldsymbol{K}_{p_1}^*]\{\boldsymbol{\phi}\}_i}{\eta_\rho\eta_H\eta_w\{\boldsymbol{\phi}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}_m^*+\boldsymbol{M}_p^*/(\lambda_1\lambda_2)]\{\boldsymbol{\phi}\}_i}=\\&\frac{\eta_E\eta_w}{\eta_\rho\eta_H\eta_w}\frac{\boldsymbol{K}_i^*}{\boldsymbol{M}_i^*}\end{aligned} \tag{18}$$

式中，ω_i 为结构第 i 阶固有频率；$\{\boldsymbol{\phi}\}_i$ 为结构第 i 阶模态向量；$\boldsymbol{K}_i^*=\{\boldsymbol{\phi}\}_i^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{K}_m^*+\dfrac{1}{\lambda_3}\boldsymbol{K}_p^*+\dfrac{1}{\lambda_4}\boldsymbol{K}_{p1}^*\right]\{\boldsymbol{\phi}\}_i$ 为其区间参数 ρ、L、H、w 取均值为1时的第 i 阶主刚度；$\boldsymbol{M}_i^*=\{\boldsymbol{\phi}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}_m^*+\boldsymbol{M}_p^*/(\lambda_1\lambda_2)]\{\boldsymbol{\phi}\}_i$ 为其区间参数E、L、H、w 取均值为1时的第 i 阶主质量。由于 $\boldsymbol{K}_i^*$、$\boldsymbol{M}_i^*$ 两者之间的分散性是完全正相关的，故其比值为确定性量。

令 $\tilde{\omega}_i^2=\boldsymbol{K}_i^*/\boldsymbol{M}_i^*$ 即为结构第 i 阶固有频率平方的区间均值，$\eta_\omega=\eta_E\eta_w/\eta_\rho\eta_H\eta_w$ 为 $\tilde{\omega}_i^2$ 的区间系数，则式(18)可表示为：

$$\omega_i^2=\eta_\omega\tilde{\omega}_i^2 \tag{19}$$

因此，η_ω 的取值范围将决定 ω_i^2 区间分散性的大小。取 $\eta_1=\eta_E\eta_w$、$\eta_2=\eta_\rho\eta_H\eta_w$，根据区间乘法运算法则可求得 η_1、η_2 区间的上下界分别为 η_1^l、η_1^u 和 η_2^l、η_2^u。由区间除法运算法则进一步可得到 η_ω 的上界 η_ω^l 和下界 η_ω^u，即有：

$$\eta_\omega^l = \min\{\eta_1^l/\eta_2^u, \eta_1^l/\eta_2^l, \eta_1^u/\eta_2^u, \eta_1^u/\eta_2^l\} \tag{20}$$

$$\eta_\omega^u = \max\{\eta_1^l/\eta_2^u, \eta_1^l/\eta_2^l, \eta_1^u/\eta_2^u, \eta_1^u/\eta_2^l\} \tag{21}$$

由于结构的固有频率大于零，所以对区间系数 η_ω 进行开平方运算时，其上下界可直接取为 $\sqrt{\eta_\omega^l}$ 、$\sqrt{\eta_\omega^u}$ ，则式(19)可表示为：

$$\omega_i = \tilde{\eta}_\omega \tilde{\omega}_i \tag{22}$$

ω_i 的区间变化率为：

$$\delta_{\omega_i} = \omega_i^r / \omega_i^c = (\omega_i^u - \omega_i^l)/(\omega_i^l + \omega_i^u) \tag{23}$$

式中，$\tilde{\eta}_\omega$ 、$\tilde{\omega}_i$ 分别为 ω_i 的区间系数和区间均值，且均值均为1；ω_i^u 、ω_i^l 分别为区间 ω_i 的上下界；ω_i^r 、ω_i^c 分别为 ω_i 的区间半径和区间均值。

4　算　例

压电智能悬臂梁结构单元划分与节点编号如图1所示，其传感层和致动层都由同一种PVDF压电材料均匀地粘贴在弹性体的上、下表面，沿梁的轴向被均匀离散为4个单元，其中节点编号由左向右依次为1～5，单元编号由左向右依次为①～④，每个单元的长度l=(7.35, 8.65) cm，其上下两层压电片厚度h=(0.075,0.125) mm，基梁厚度H=(4.37,5.63) mm，梁宽w=(4.83,5.17) mm。PVDF的物理区间参数为：压电常数 e_{31}=(0.045,0.047)C/m^2，介电常数 e_{33}^e = (1,1.122)×10^{-10} f/m，弹性模量 E_p=(1.97,2.03)×109 N/m^2，密度 ρ_p = (1.695, 1.905) ×10^3 kg/m^3。弹性体的物理区间参数为：密度 ρ_m = (7.695, 8.305)×10^3 kg/m^3，弹性模量 E_m = (1.83, 2.37)×10^{11} N/m^2，控制增益 $\boldsymbol{G}$ = (88.5, 91.5)$\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

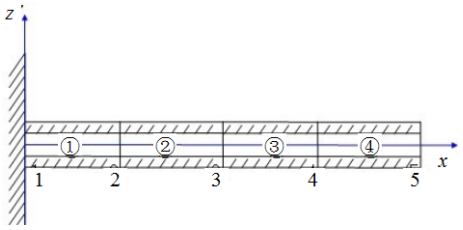

图1　智能悬臂梁结构图

本文依据式(20)～式(21)在结构物理参数(ρ 、E)和几何参数(H 、w)分别为区间参数以及同时为区间参数时，计算闭环结构固有频率 ω_i 的区间系数 $\tilde{\eta}_\omega$ 的区间均值以及上下界，如表1所示。对应于表1，表2给出了压电智能悬臂梁结构闭环系统相应的3种区间模型其结构的前5阶固有频率的取值范围以及区间均值，并列出了在物理参数与几何参数分别和同时为区间参数时结构固有频率的区间变化率。为了对比本文方法的正确性，在确定性模型中给出了所有区间变量取区间均值时，结构闭环系统固有频率的确定性模型计算结果。

表1　固有频率区间系数的取值范围

区间模型		$\tilde{\eta}_\omega^c$	$\sqrt{\eta_\omega^l}$	$\sqrt{\eta_\omega^u}$
区间模型Ⅰ：	$\eta_H = (0.874,1.126)$; $\eta_w = (0.966,1.034)$ $\eta_\rho^c = \eta_E^c = \eta_H^c = \eta_w^c = 1$	1.019 0	0.940	1.098
区间模型Ⅱ：	$\eta_\rho = (0.962,1.038)$; $\eta_E = (0.871,1.128)$ $\eta_H^c = \eta_w^c = \eta_\rho^c = \eta_E^c = 1$	1.007 5	0.923	1.092
区间模型Ⅲ：	$\eta_H = (0.874,1.126)$; $\eta_w = (0.966,1.034)$; $\eta_\rho = (0.962,1.038)$ $\eta_E = (0.871,1.128)$; $\eta_H^c = \eta_w^c = \eta_\rho^c = \eta_E^c = 1$	1.030 0	0.800	1.260

表2　闭环系统固有频率取值范围及区间均值的计算结果

固有频率 ω_i /Hz	确定性模型	区间模型Ⅰ	区间模型Ⅱ	区间模型Ⅲ
$(\omega_1^l, \omega_1^u)/\omega_1^c/\delta_{\omega_1}$	- - /71.402 1/- -	(64.579 3,78.438 1) /71.437 3/0.096 9	(65.903 3,77.970 1) /71.401 2/0.083 9	(57.254 7,90.176 1) /71.568 4/0.223 3
$(\omega_2^l, \omega_2^u)/\omega_2^c/\delta_{\omega_2}$	- - /392.010 2/- -	(354.592 4,430.688 5) /392.248 2/0.096 9	(361.793 6,428.037 5) /391.975 8/0.083 9	(314.266 3,494.969 4) /392.832 9/0.223
$(\omega_3^l, \omega_3^u)/\omega_3^c/\delta_{\omega_3}$	- - /955.686 4/- -	(864.795 2,1 050.381 8) /956.631 9/0.096 9	(881.950 1,1 043.433 9) /955.525 6/0.083 9	(766.033 8, 1 206.503 2) /957.542 3/0.223 3
$(\omega_4^l, \omega_4^u)/\omega_4^c/\delta_{\omega_4}$	- - /1 563.147 0/- -	(1 414.058 3,1 717.517 7) /1 564.223 8/0.096 9	(1 442.879 2,1 707.068 4) /1 563.249 5/0.083 9	(1 252.921 9,1 973.352 0) /1 566.152 4/0.223 3
$(\omega_5^l, \omega_5^u)/\omega_5^c/\delta_{\omega_5}$	- - /3 058.224 6/- -	(2 764.575 5,3 357.858 3) /3 058.158 8/0.096 9	(2 820.209 1,3 336.585 4) /3 055.481 2/0.083 9	(2 447.401 0,3 854.656 6) /3 059.251 3/0.223 3

对比表2中区间变化率的计算结果可知，在结构几何参数和物理参数的区间分散性相同的情况下，几何参数对结构闭环系统固有频率的区间分散性影响较大；在结构物理参数和几何参数同时为区间变

量时，结构固有频率的区间变化率将显著增大。

5 结 论

本文利用位移反馈控制规律建立了压电智能梁结构闭环系统的区间模型，对结构的物理参数和几何参数均为区间变量的情况下，通过区间分析法分析了压电智能梁结构闭环系统的动态特性。

算例计算结果表明，本文建立的区间参数压电智能梁结构闭环系统的计算模型是合理的。该方法的优点在于只需已知系统中诸区间参数的上下界，根据区间变化率的大小即可反映出结构参数对固有频率区间分散性的影响程度。

参 考 文 献

[1] 陈塑寰, 马爱军, 刘中生. 智能结构的梁有限元模型[J]. 宇航学报, 1997, 18(2): 72-77.
CHEN Su-huan, MA Ai-jun, LIU Zhong-sheng. Finite element model of beams of intelligent structures[J]. Jounrnal of Astronautics, 1997, 18(2): 72-77.

[2] 曹宗杰, 闻邦椿, 陈塑寰. 含压电材料智能结构动态特性的研究[J]. 计算力学学报, 2001, 18(3): 267-270.
CAO Zong-jie, WEN Bang-chun, CHEN Su-huan. Research of dynamic behaviors of intelligent structures with piezoelectric materials[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(3): 267-270.

[3] CHEN Jian-jun, CHE Jian-wen, SUN Huai-an, et al. Probabilistic dynamic analysis of truss structures[J]. Structural Engineering & Mechanics, 2002, 13(2): 231-239.

[4] 陈建军, 石光军, 王小兵, 等. 随机参数压电智能梁结构的动态特性分析[J]. 振动、测试与诊断, 2007, 27(1): 20-24.
CHEN Jian-jun, SHI Guang-jun, WANG Xiao-bing, et al. Analysis of dynamic characteristic for intelligent beam with random parameters[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2007, 27(1): 20-24.

[5] CHEN Su-huan, ZHANG Xiao-ming, CHEN Yu-dong. Interval eigenvalues of closed-loop systems of uncertain structures[J]. Computers and Structures, 2006, 84(3-4): 243-253.

[6] MOENS D, VANDEPITTE D. An interval finite element approach for the calculation of envelope frequency response functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(14): 2480-2507.

[7] 林立广, 陈建军, 马娟, 等. 基于区间因子法的不确定性桁架结构动力响应分析[J]. 应用力学学报, 2008, 25(4): 612-617.
LIN Li-guang, CHEN Jian-jun, Ma Juan, et al. Response analysis for uncertainty truss structures with interval factor method[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, 25(4): 612-617.

[8] CHEN S H, WU J. Interval optimization of dynamic response for structures with interval parameters[J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 1-11.

[9] ADDURI P R, PENMETSA R C. Bounds on structuralsystem reliability in the presence of interval variables[J]. Computers and Structures, 2007, 85(5-6): 320-329.

[10] MOENS D, VANDEPITTE D. Interval sensitivity theory and its application to frequency response envelope analysis of uncertain structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(21-24): 2486-2496.

[11] ZALEWSKI B F, MULLEN R L, MUHANNA R L. Interval boundary element method in the presence of uncertain boundary conditions, integration errors, and truncation errors[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(4): 508-513.

[12] GAO W, CHEN J J, MA H B. Dynamic response analysis of closed loop control system for intelligent truss structures based on probability[J]. Structural Engineering & Mechanics, 2003, 15(2): 239-249.

[13] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
QIU Zhi-ping. Convex method based on non-probabilistic set-theory and its application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.

编 辑 黄 莘