单环法求解基于可靠性的设计优化问题

张旭东[1]，黄洪钟[1]，XIE Min[2]

(1. 电子科技大学机械电子工程学院　成都　611731;　2. Department of Industrial and Systems Engineering, National University of Singapore　Singapore)

【摘要】在结构设计中，为获得高可靠性和安全性的机械结构，基于可靠性的设计优化受到了越来越多的关注。基于可靠性分析方法，分别提出了基于可靠性指数法和性能评估法的单环法，直接将基于可靠性的设计优化问题转化为确定性优化设计问题求解。典型算例表明，该方法是有效和高效的。

关　键　词　优化设计;　可靠性;　可靠性分析;　结构设计

中图分类号　TH122　　**文献标识码**　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.01.030

Single Loop Methods for Reliability Based Design Optimization

ZHANG Xu-dong[1], HUANG Hong-zhong[1], and XIE Min[2]

(1. School of Machatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China　Chengdu　611731;

2. Department of Industrial and Systems Engineering, National University of Singapore　Singapore)

Abstract　In structural design, the reliability-based design optimization (RBDO) has received increasing attention for high reliability and safety. This paper proposes two single-loop methods based on reliability index approach and performance measure approach for RBDO. These two methods directly transform the original RBDO problem into a deterministic optimization. Two well-known RBDO problems are utilized to demonstrate efficiencies of the proposed methods.

Key words　design optimization;　reliability;　reliability analysis;　structural design

与确定性优化设计不同，在基于可靠性的设计优化(RBDO)数学模型中含有可靠性约束(概率约束)。直接求解RBDO问题时存在两个嵌套环，即最小化外部环目标函数的同时调用内部环进行可靠性分析(分析可靠性约束的可行性)。为减少求解RBDO的计算量，根据文献[1]，现有的方法大致可分为：

1) 提高可靠性分析方法的效率，包括修改可靠性约束如可靠性指数法(RIA)、性能评估法(PMA)和改进的PMA方法[2-5]，以及提高寻找最可能失效点(most probable point，MPP)算法的效率如HMV (hybrid mean value)[6]和改进的HMV (HMV+)[7]。

2) 将嵌套环的求解形式解开，如SORA (sequential optimization and reliability assessment)[8]、改进的SORA[9]、单环法[10]。

3) 自适应环法[11]以及自适应序列线性规划策略[12]等。

上述方法虽在一定程度上提高了求解效率，但求解过程中仍需进行计算费用较高的MPP搜索。文献[1]采用RDS (reliability design space)概念，提出了一种将RBDO问题转换为确定性优化设计问题求解的方法。分别基于RIA和PMA，本文提出了单环法，直接将基于可靠性的设计优化问题转化为确定性优化设计问题求解。

1　RBDO

1.1　RBDO模型

RBDO的数学模型为[8]：

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu}_X} f(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu}_X,\boldsymbol{\mu}_P) \\ &\text{s.t. } \mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0)\geqslant R_i \quad i=1,2,\cdots,n \\ &g_j(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu}_X,\boldsymbol{\mu}_P)\geqslant 0 \quad j=1,2,\cdots,m \\ &\boldsymbol{d}^{\mathrm{L}}\leqslant \boldsymbol{d}\leqslant \boldsymbol{d}^{\mathrm{U}} \\ &\boldsymbol{\mu}_X^{\mathrm{L}}\leqslant \boldsymbol{\mu}_X\leqslant \boldsymbol{\mu}_X^{\mathrm{U}} \end{aligned} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{\mu}_X$、$\boldsymbol{\mu}_P$ 分别为确定性的设计变量、随机变量的均值和随机参数的均值，$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{\mu}_X$ 为RBDO中设计变量，$\boldsymbol{\mu}_P$ 值已知；$f(\cdot)$ 为目标函数；$G_i(\cdot)$ 为功能函数，$i=1,2,\cdots,n$；$\mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0)$ 为安全概率(安全形式定义为 $G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0$)；$R_i$ 为第i个

收稿日期：2009 – 06 – 25;　修回日期：2010 – 05 – 17
基金项目：国家自然科学基金(70828001)
作者简介：张旭东 (1983 –)，男，博士生，主要从事不确定性下的多学科设计优化方面的研究.

功能函数要求达到的目标可靠性；$g_j(\cdot)$为确定性的约束函数，$j=1,2,\cdots,m$；“L”和“U”分别代表下界和上界。

假设所有随机变量和参数相互独立，概率$\mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0)$是一多维积分，其表达式为：

$$\mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0)=\int\cdots\int_{G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0} f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

式中，$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$为$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{P}$的联合概率密度函数。目前常用的评估可靠性约束可行性的方法有RIA和PMA[3-8]。

1.2 RIA

式(1)中的概率约束可转化为[3-4]：

$$\beta_i-\beta_{ri}\geqslant 0$$

式中，β_i为可靠性指数；$\varPhi(\beta_{ri})=R_i$，$\varPhi$为标准正态随机变量的累积分布函数。采用RIA进行可靠性分析时，需要使用Rosenblatt转化将所有随机变量和参数转化为U空间中的标准正态随机变量和参数$\boldsymbol{U}$，然后求解优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{U}}\ \|\boldsymbol{U}\|_2\\&\text{s.t.}\quad G(\boldsymbol{U})=0\end{aligned}\tag{2}$$

式(2)的最优解为MPP $\boldsymbol{U}^*$，由MPP进而获得可靠性指数β_i。X空间中的MPP可通过逆Rosenblatt转化获得。

1.3 PMA

式(1)中的概率约束可转化为$G_i^{R_i}\geqslant 0$[3-4,8]。首先将所有随机变量和参数转化为U空间中的标准正态随机变量和参数，$G_i^{R_i}$的值可通过求解以下优化问题获得：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{U}}\ G(\boldsymbol{U})\\&\text{s.t.}\quad \|\boldsymbol{U}\|_2=\beta_{ri}\end{aligned}\tag{3}$$

式(3)的最优解为MPP $\boldsymbol{U}^*$；$G^{R_i}=G(\boldsymbol{U}^*)$。

2 求解RBDO的单环法

当随机变量和参数不是正态分布时，在某点X'处等价的正态分布的均值和方差[9]为：

$$\sigma_x^N=\phi\{\varPhi^{-1}[F_x(X')]\}/f_x(X')$$
$$\mu_x^N=X'-\varPhi^{-1}[F_x(X')]\sigma_x^N$$

式中，f_x和F_x分别为随机变量X的概率密度函数和累积分布函数；ϕ为标准正态随机变量的概率密度函数。因此，本文主要讨论随机变量和参数服从正态分布的情形。当随机变量$X\sim N(\mu,\sigma)$(μ为均值，σ为标准差)，U空间中相应的标准正态变量U为：

$$U=\frac{X-\mu}{\sigma}\tag{4}$$

2.1 基于RIA的单环法(SRIA)

采用一次二阶矩法，在RIA方法中的可靠性指数[1]为：

$$\beta_i=\varPhi^{-1}\left(\int\cdots\int_{G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{u})\geqslant 0} f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right)\approx -\frac{\sum_j U_j^*(\partial G_i/\partial U_j)_*}{\sqrt{\sum_j(\partial G_i/\partial U_j)_*^2}}\tag{5}$$

式中，$(\partial G_i/\partial U_j)_*$为$G_i$在$U$空间MPP处的偏导数。在RIA中为满足可靠性约束需$\beta_i-\beta_{ri}\geqslant 0$，在$U$空间MPP处有：

$$U_j^*=-\frac{(\partial G_i/\partial U_j)_*}{\sqrt{\sum_j(\partial G_i/\partial U_j)_*^2}}\beta_i\tag{6}$$

由式(4)可得：

$$\begin{cases}\mathrm{d}U=\dfrac{\mathrm{d}X}{\sigma}\\[2mm]\dfrac{\partial G_i}{\partial U_j}=\dfrac{\partial G_i}{\partial X_j}\dfrac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}U_j}=\dfrac{\partial G_i}{\partial X_j}\sigma_j\end{cases}\tag{7}$$

由式(4)、式(6)、式(7)可得：

$$\beta_i=-\frac{(X_j^*-\mu_j)}{\sigma_j}\frac{\sqrt{\sum_j[\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*]^2}}{\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*}\tag{8}$$

为满足可靠性约束需$\beta_i-\beta_{ri}\geqslant 0$，可得：

$$-\frac{(X_j^*-\mu_j)}{\sigma_j}\frac{\sqrt{\sum_j[\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*]^2}}{\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*}\geqslant\beta_{ri}\tag{9}$$

式中，$(\partial G_i/\partial X_j)_*$为$G_i$在X空间MPP处的导数，并且在MPP点处，有：

$$G_i(\boldsymbol{X}^*)=0\tag{10}$$

由此，可靠性约束$\mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})\geqslant 0)\geqslant R_i$转化为确定性约束(式(9)、式(10))。

2.2 基于PMA的单环法(SPMA)

在PMA中，为满足可靠性约束需$G_i^{R_i}\geqslant 0$，在U空间MPP处有：

$$U_j^*=-\frac{(\partial G_i/\partial U_j)_*}{\sqrt{\sum_j(\partial G_i/\partial U_j)_*^2}}\beta_{ri}\tag{11}$$

由式(4)、(7)和(11)可得：

$$X_j^*=\mu_j-\frac{\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*}{\sqrt{\sum_j[\sigma_j(\partial G_i/\partial X_j)_*]^2}}\beta_{ri}\sigma_j\tag{12}$$

为满足可靠性约束，有：

$$G_i(\boldsymbol{X}^*) \geqslant 0 \qquad (13)$$

由此，可靠性约束 $\mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P}) \geqslant 0) \geqslant R_i$ 转化为确定性约束(式(12)、式(13))。式(12)、式(13)与文献[1]中得到的结果是等价的。

将式(9)、式(10)或式(12)、式(13)替代RBDO中的可靠性约束，则RBDO转化为确定性优化问题。本文将各可靠性约束相应的MPP作为确定性优化问题额外的设计变量。

3 算　例

3.1 数学算例

算例的数学模型为[1]：

$$\min_{\mu_1,\mu_2} f = \mu_1 + \mu_2$$

$$\text{s.t.}\ \ \mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{X}) \geqslant 0) \geqslant R_i \qquad i = 1 \sim 3$$

$$G_1(\boldsymbol{X}) = X_1^2 X_2 / 20 - 1$$

$$G_2(\boldsymbol{X}) = (X_1 + X_2 - 5)^2 / 30 + (X_1 - X_2 - 12)^2 / 120 - 1$$

$$G_3(\boldsymbol{X}) = 80 / (X_1^2 + 8X_2 + 5) - 1$$

$$0 \leqslant \mu_j \leqslant 10 \qquad j = 1,2$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$$

$$\beta_{ri} = 3 \text{ for } i = 1 \sim 3$$

为与文献[1]中的方法进行比较，本文采用与文献[1]相同的优化方法(Matlab中的“fmincon”)求解。表1列出不同方法的优化结果，第1～3列分别为DLP/PMA、SORA和Single loop的优化结果[10]，第5列为文献[1]方法的优化结果，第5～6列分别为SRIA和SPMA的优化结果(起始点均为[5 5 5 5 5 5 5 5])。

表1　不同方法的优化结果

方法	DLP/PMA	SORA	Single loop	RDS	SRIA	SPMA
μ_1	3.439 1	3.440 9	3.439 1	3.440 6	3.439 1	3.439 1
μ_2	3.286 6	3.290 9	3.286 4	3.280 0	3.286 6	3.286 6
$f(\boldsymbol{\mu})$	6.725 7	6.731 8	6.725 5	6.720 5	6.725 7	6.725 7
			约束			
$G_1(\boldsymbol{X}^*)$	0	0	0	0	$-0.792\ 7\times10^{-13}$	0
$G_2(\boldsymbol{X}^*)$	0	0	0	0	$0.566\ 2\times10^{-13}$	0
$G_3(\boldsymbol{X}^*)$	0.5	0.507 1	0.509 7	0.512 3	0	0.509 6
N.I.	4 outer	4 cycles	4	6	7	7
N.F.E.	1 566	151	19	27	79	79
			Monte Carlo仿真			
$G_1(\boldsymbol{X})$	0.998 5	0.998 6	0.998 5	0.998 5	0.998 5	0.998 5
$G_2(\boldsymbol{X})$	0.998 9	0.998 9	0.998 8	0.998 8	0.998 9	0.998 9
$G_3(\boldsymbol{X})$	1	1	1	1	1	1

本文提出的方法获得的最优解与DLP/PMA的最优解相同，优于SORA的最优解；并且该方法所需函数调用次数显著少于DLP/PMA。由于Single loop采用的优化路线未知，其函数调用次数少于SRIA和SPMA的原因需进一步的研究。在RDS方法中，通过采用功能函数在均值点处的梯度近似其在MPP处的梯度值，将RBDO问题转换为确定性优化问题[1]。RDS方法的函数调用次数少于本文方法的原因为：在该方法中各功能函数的MPP是作为额外的设计变量，增加了确定性优化问题的求解规模，造成了函数调用次数的增加。但在RDS方法中，使用功能函数在MPP处梯度的近似值可能会造成其获得的解并不是原RBDO的最优解，而本文的方法克服了RDS的上述不足。SRIA中功能函数值均近似等于零，表明各可靠性约束均满足；SPMA中功能函数值不小于零，表明各可靠性约束均满足。Monte Carlo仿真结果表明各功能函数在SRIA和SPMA最优解处的可靠性要求均满足。

3.2 悬臂梁的设计

悬臂梁设计的数学模型为[1]：

$$\min_{w,t} f = wt$$

$$\text{s.t.}\ \ \mathrm{Prob}(G_i(\boldsymbol{d},\boldsymbol{X},\boldsymbol{P}) \geqslant 0) \geqslant R_i \qquad i = 1,2$$

$$G_1(w,t,S,Y,Z) = S - \left(\frac{600}{wt^2}Y + \frac{600}{w^2 t}Z\right)$$

$$G_2(w,t,E,Y,Z) = D_0 - \frac{4L^3}{Ewt}\sqrt{\left(\frac{Y}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{w^2}\right)^2}$$

$$0 \leqslant w \qquad t \leqslant 5$$

式中，t 为宽度；w 为厚度；S 为随机屈服强度；Y 和 Z 分别为独立的垂直和横向的载荷；E 为杨氏模量；$\beta_1 = \beta_2 = 3$ 为目标可靠性指数。本文采用与文献[1]相同的优化方法(fmincon)求解，起始点分别为SRIA[3 3 4×10^4 700 500 29×10^6 700 500]和SPMA[2.255 3 4×10^4 1 000 500 29×10^6 1 000 500]。表2列出了不同方法的优化结果，第1～3列的优化结果均来自文献[1]。从表2第4行各方法最优解处的目标函数值可得：该算例中SRIA和SPMA获得的最优解优于DLP/PMA的最优解；而Single loop、RDS、SRIA和SPMA获得的最优解处的目标函数值相同，说明本文方法具有与Single loop、RDS相同的计算准确性。SRIA中功能函数值近似等于零，说明均可靠性约束均满足；SPMA中功能函数值均不小于零，说明均可靠性约束均满足。Monte Carlo仿真结果表明，各功能函数在SRIA和SPMA最优解处的可靠性要求均满足。

表2 不同悬臂梁设计方法的优化结果

方法	DLP/PMA	Single loop	RDS	SRIA	SPMA
w	2.478 1	2.447 9	2.446 0	2.446 0	2.446 2
t	3.842 1	3.889 2	3.892 1	3.892 2	3.891 9
f	9.521 2	9.520 2	9.520 2	9.520 2	9.520 2
	约束				
G_1^*	0.003 8	0	0	$-0.240\,8\times10^{-7}$	0
G_2^*	0.359 3	0.318 4	0.371 9	$-0.773\,6\times10^{-11}$	0.244 3
	Monte Carlo 仿真				
G_1	0.998 6	0.998 6	0.998 6	0.998 6	0.998 6
G_2	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.999 9

4 结 论

本文基于可靠性分析方法(可靠性指数法和性能评估法)，分别提出了相应的单环法(SRIA和SPMA)，直接将基于可靠性的设计优化问题转化为确定性的优化设计问题求解。算例结果表明，本文提出的方法是有效和高效的。与DLP/PMA优化和可靠性分析嵌套求解、SORA优化和可靠性分析顺序求解方式不同，SRIA和SPMA将可靠性约束转化为等价的确定性约束，使得经优化得到的最优解在满足可靠性约束的同时最小化目标函数，从而大大降低了函数调用次数。由于SRIA和SPMA以各可靠性约束的MPP作为额外的设计变量增加了优化问题的求解规模，使得函数调用次数多于RDS方法。但RDS方法中采用各功能函数在均值处的梯度近似其在MPP处的梯度值，可能导致RDS方法得到的最优解并非原RBDO的最优解；而SRIA和SPMA克服了RDS方法的上述不足。对于本文给出的算例，由于Single loop方法采用的优化路线未知，其函数调用次数少于SRIA和SPMA的原因需要进一步的研究。

参 考 文 献

[1] SHAN S, WANG G G. Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(8): 1218-1230.

[2] ENEVOLDSEN I, SORENSEN J D. Reliability-based optimization in structural engineering[J]. Structural Safety, 1994, 15: 169-196.

[3] TU J, CHOI K K. A new study on reliability based design optimization[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121(4): 557-564.

[4] YOUN B D, CHOI K K. Selecting probabilistic approaches for reliability-based design optimization[J]. AIAA Journal, 2004, 42(1): 124-131.

[5] YOUN B D, CHOI K K. Enriched performance measure approach for reliability-based design optimization[J]. AIAA Journal, 2005, 43(4): 874-884.

[6] YOUN B D, CHOI K K, PARK Y H. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2003, 125(2): 221-232.

[7] YOUN B D, CHOI K K, DU L. Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 29(2): 134-148.

[8] DU X, CHEN W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126: 225-233.

[9] YIN X, CHEN W. Enhanced sequential optimization and reliability assessment method[J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2006, 2(3): 261-275.

[10] LIANG J, MOURELATOS Z P, TU J. A single-loop method for reliability-based design optimization[C]//Design Engineering Technical Conferences. Salt Lake City, USA: ASME, 2004.

[11] YOUN B D. Integrated framework for design optimization under aleatory and/or epistemic uncertainties using adaptive-loop method[C]//Design Engineering Technical Conferences. Long Beach, USA: ASME, 2005.

[12] CHAN K Y, SKERLOS S J, PAPALAMBROS P Y. An adaptive sequential linear programming algorithm for optimal design problems with probabilistic constraints[C]//Design Engineering Technical Conferences. Long Beach, USA: ASME, 2005.

编 辑 黄 莘