Rough逻辑系统RSL与模糊逻辑系统Łuk

张小红[1]，祝　峰[2]

(1. 上海海事大学文理学院　上海 浦东区　201306;　2. 电子科技大学计算机科学与工程学院　成都　610054)

【摘要】基于rough集的偶序对⟨下近似,上近似⟩表示，通过改进基于rough集的逻辑系统$\mathcal{L}$的方法引入新的rough蕴涵算子，研究了它的基本性质，并将其进一步拓广到一般正则双Stone代数中，证明了添加新蕴涵算子后的正则双Stone代数构成*MV*-代数。其次，以上述结果为背景，建立了一个基于rough蕴涵的逻辑形式系统RSL，其语义是扩展的rough双Stone代数；同时，引入RSL-代数的概念，并证明了逻辑系统RSL的标准完备性定理(基于由近似空间确定的标准RSL-代数)。最后，说明了逻辑系统RSL是著名模糊逻辑系统Łuk(即Łukasiewicz连续值逻辑系统)的语义扩张，从而从一个特殊的视角揭示了rough集与模糊逻辑的联系。

关　键　词　模糊逻辑;　正则双Stone代数;　rough蕴涵;　rough逻辑;　rough集

中图分类号　TP301；TP18　　**文献标识码**　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.02.028

Rough Logic System RSL and Fuzzy Logic System Łuk

ZHANG Xiao-hong[1] and ZHU Feng[2]

(1. College of Art and Sciences, Shanghai Maritime University　Pudong Shanghai　201306;

2. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China　Chengdu　610054)

Abstract　From the description of the pairs ⟨low approximation, upper approximation⟩ of rough sets, a new rough implication operator is introduced by modifying the method by Ref. [1], some algebraic properties of this rough implication operator are investigated, and these results are generalized to regular double Stone algebras and the following important result is proved: the regular double Stone algebra with the new rough implication operator is an MV-algebra. Further more a rough logic system RSL is constructed, its schematic is rough sets and extensional regular double Stone algebras. The completeness theorem of RSL is proved by introducing the notion of RSL-algebra. Finally, the relationship between rough logic RSL and fuzzy logic Łuk (continuous-valued tukasiewicz logic system) is discussed.

Key words　fuzzy logic;　regular double Stone algebra;　rough implication;　rough logic;　rough set

自文献[1]创立rough集理论以来，一方面，rough逻辑的研究一直受到大批学者的广泛关注[1-6]，但涉及rough蕴涵的研究却很有限。另一方面，rough集与模糊集理论作为处理不确定性现象的两种数学方法，其结合研究同样是活跃的研究方向[7-8]，但把ruogh逻辑与近年模糊逻辑[9-13]最新进展直接进行结合的逻辑学研究却未曾见到。本文从改进文献[2]中给出的rough蕴涵出发，构建了新的rough蕴涵算子，并在此基础上建立了基于rough蕴涵的逻辑形式系统RSL，证明了它是著名模糊逻辑系统Łuk(即Łukasiewicz连续值逻辑系统)的扩张，从一个特殊的视角揭示了Rough集与模糊逻辑的密切关系，从而对上述两个方面的不足给出一种全新的解决方案。

需要说明的是：1) 与文献[6,14]不同的是，本文不仅研究新rough蕴涵算子的构造及其代数性质，而且基于此建立了新的逻辑形式化系统RSL，并证明了它的标准完备性定理，与传统rough逻辑[4]的研究方法不同，也与将模糊集与rough集相结合构建模糊rough集模型[7-8]的思路不同，因而具有一定的创新意义。此外，文献[5]中虽然也给出了一个基于rough双Stone代数的逻辑演算系统，但没有给出rough蕴涵的具体定义且没有证明标准完备性定理。2) 本文是对文献[13]第五章“与模糊逻辑相关的rough逻辑系统”主要结果的改进，一些仍然适用的结论的证明过程被省略了，请参阅文献[13]。

收稿日期：2009 – 08 – 27;　修回日期：2010 – 02 – 20

基金项目：国家自然科学基金(60775038,60873077)；宁波市自然科学基金(2009A610078)

作者简介：张小红(1965 –)，男，教授，博士，博士生导师，主要从事代数学、模糊逻辑与Rough集理论、计算机科学中的非经典逻辑方面的研究.

1　rough蕴涵与逻辑系统Łuk

定义 1　设U是非空集，R是U上的等价关系，称序对(U,R)为近似空间。对任意$X\subseteq U$，集合$\cup\{[x]|x\in X\}$称为X的上近似，记为X_u，其中$[x]$表示x所在的R等价类；集合$\cup\{[x]|[x]\subseteq X\}$称为$X$的下近似，记为$X_d$。$(U,R)$上的一个rough集是指序对$\langle X_d,X_u\rangle$，$X\subseteq U$。$(U,R)$上所有rough集构成的集称为完全rough集代数(full algebra of rough sets)，记为$\mathrm{Sb}_r(U,R)$。

注：本文的full algebra of rough sets及记号$\mathrm{Sb}_r(U,R)$源自文献[15]。

定义 2　设(U,R)为近似空间，$\mathrm{Sb}_r(U,R)$为(U,R)上所有Rough集构成的族，$\theta=\langle\varnothing,\varnothing\rangle$，$I=\langle U,U\rangle$。对任意$\langle X_d,X_u\rangle$，$\langle Y_d,Y_u\rangle\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$定义$\langle X_d,X_u\rangle\subseteq\langle Y_d,Y_u\rangle$当且仅当$X_d\leqslant Y_d$，$X_u\leqslant Y_u$，$\langle X_d,X_u\rangle\vee\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X_d\cup Y_d,X_u\cup Y_u\rangle$，$\langle X_d,X_u\rangle\wedge\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X_d\cap Y_d,X_u\cap Y_u\rangle$，$\langle X_d,X_u\rangle^*=\left\langle X'_u,X'_u\right\rangle$，其中“′”表示集合论中的补运算，则称$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,\theta,I)$为粗Stone代数。若在粗Stone代数中再定义如下一元运算：

$$\langle X_d,X_u\rangle^+=\left\langle X'_d,X'_d\right\rangle,\ \forall\langle X_d,X_u\rangle\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$$

则称$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数。

注：可以证明(此略)，上述定义的运算$\vee$、$\wedge$、*、$^+$均在$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上封闭。

定义 3　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数。定义$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的算子$\rightarrow_{ND}$如下：

$\forall\langle X_d,X_u\rangle$，$\langle Y_d,Y_u\rangle\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\langle X_d,X_u\rangle\rightarrow_{\mathrm{ND}}\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X'_u\cup Y_d\cup(Y_u\cap X'_d),X'_d\cup Y_u\rangle$

称为$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的ND型蕴涵算子。

注：1) 上述蕴涵是文献[2]中rough蕴涵概念的改进，故称为ND型，即new D-type；2) 上述定义源自文献[16]，不过在该文献里是基于Boole代数上广义rough集模型的，也没有论证其封闭性。

定理 1　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，$\rightarrow_{\mathrm{ND}}$是ND型蕴涵算子，则：

1) $\forall\langle X_d,X_u\rangle$，$\langle Y_d,Y_u\rangle\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\langle X_d,X_u\rangle\rightarrow_{\mathrm{ND}}\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle(X'_d\cup Y_d)\cap(X'_u\cup Y_u),X'_d\cup Y_u\rangle$；

2) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\varphi\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi=(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\neg\varphi\vee\psi^{*+})$，$\neg\varphi=\varphi^+\wedge(\varphi\vee\varphi^*)$；

3) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\varphi\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi=(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\varphi^+\vee\psi^{*+})\wedge(\varphi\vee\varphi^*\vee\psi^{*+})$；

4) $\mathrm{Sb}_r(U,R)$关于$\rightarrow_{\mathrm{ND}}$是封闭的；

5) $\forall\varphi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\neg\varphi=\varphi\rightarrow_{ND}\theta$。

证明　参见文献[13]中的定理5.2.4。

定义 4　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数。定义$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的运算$\otimes_{\mathrm{ND}}$如下：

$\forall\langle X_d,X_u\rangle$、$\langle Y_d,Y_u\rangle\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\langle X_d,X_u\rangle\otimes_{\mathrm{ND}}\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X_d\cap Y_d,X_u\cap Y_u\cap(X_d\cup Y_d)\rangle$称为$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的ND型模算子。

定理 2　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，$\otimes_{\mathrm{ND}}$是$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的ND型模算子，则：

1) $\forall\varphi$，$\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\varphi\otimes_{ND}\psi=(\varphi^{++}\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\psi^{++})$；

2) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\varphi\otimes_{\mathrm{ND}}\psi=\neg(\varphi\rightarrow_{ND}\neg\psi)$；

3) $\mathrm{Sb}_r(U,R)$关于$\otimes_{\mathrm{ND}}$是封闭的。

证明　依据定义，可直接验证1)和2)成立。而由1)及$\vee$、$\wedge$、$^+$的封闭性知，$\mathrm{Sb}_r(U,R)$关于$\otimes_{\mathrm{ND}}$封闭。

定理 3　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，$\rightarrow_{\mathrm{ND}}$是ND型蕴涵算子，$\otimes_{\mathrm{ND}}$是$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的ND型模算子，则：

1) $(\mathrm{Sb}_r(U,R);\otimes_{\mathrm{ND}},I)$是以$I$为单位的交换半群；

2) $\forall\varphi,\psi,\chi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\varphi\leq\psi\rightarrow_{ND}\chi$当且仅当$\varphi\otimes_{\mathrm{ND}}\psi\leqslant\chi$；

3) $\forall\varphi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$\neg\neg\varphi=\varphi$；

4) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$(\varphi\rightarrow_{ND}\psi)\vee(\psi\rightarrow_{ND}\varphi)=1$。

证明　参见文献[16]。

运用文献[17]中的Theorem 16易得如下定理。

定理 4　设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，$\rightarrow_{\mathrm{ND}}$是ND型蕴涵算子，则：

1) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$，$(\varphi\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi)\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi=\varphi\vee\psi$；

2) $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Sb}_r(U,R)$,

$(\varphi\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi)\rightarrow_{\mathrm{ND}}\psi=(\psi\rightarrow_{\mathrm{ND}}\varphi)\rightarrow_{\mathrm{ND}}\varphi$。

定义 5[9-10,13]　设S是所有命题变元之集，$F(S)$是由S生成的$(\rightarrow,\neg)$-型自由代数，其中$\rightarrow$、$\neg$分别是二元、一元逻辑联结词。逻辑系统Łuk由MP规则及以下公理构成：

1) $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$；

2) $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow((\psi\rightarrow\chi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$；

3) $(\neg\psi\rightarrow\neg\varphi)\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$；

4) $((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\psi)\rightarrow((\psi\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi)$。

同时，在系统Łuk中，用$\varphi\vee\psi$表示$(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\psi$，用$\varphi\wedge\psi$表示$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$，用$\varphi\&\psi$表示$\neg(\varphi\rightarrow\neg\psi)$。

按常规方法，可在Łuk中定义“证明”、“定理”等概念。如果φ是系统Łuk中的定理，则记为$\vdash\varphi$。

定义 6[9,13]　设$(L;\vee,\wedge,0,1)$是一个有界格，其中1和0分别是最大元和最小元。如果L上还有两个二元

运算$\otimes$和$\to$，且满足：

1) $(L;\otimes,1)$是以1为单位的交换半群，即$\otimes$满足交换律和结合律且$1\otimes x=x$，$\forall x\in L$；

2) $(\otimes,\to)$是伴随对，即$x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当$x\leqslant y\to z$，$\forall x,y,z\in L$，则称$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$为剩余格。

定义 7[9,13] 设$(L;\vee,\wedge,\otimes\ \to,0,1)$是一个剩余格，若$L$满足以下条件：

1) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$，$\forall x,y\in L$；

2) $x\wedge y= x\otimes(x\to y)$，$\forall x,y\in L$。

则称$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$为BL-代数。一个BL-代数$L$若还满足条件：

3) $(x\to 0)\to 0=x$，$\forall x\in L$，则称$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$为MV-代数。

一个MV-代数$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$称为标准MV-代数，如果它被定义在实单位区间[0,1]，即L=[0,1]，$\vee$、$\wedge$分别为max、min，且$\otimes$、$\to$分别定义为$x\otimes y=\max(x+y-1,0)$、$x\to y=\min(1-x+y,1)$、$\forall x,y\in[0,1]$。

定义 8[9-10,13] 设$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$是MV-代数，映射$v:F(S)\to L$称为$L$-赋值，如果$(\forall\varphi,\psi\in F(S))$，$v(\neg\varphi)=v(\varphi)\to 0$，$v(\varphi\wedge\psi)=v(\varphi)\wedge v(\psi)$，$v(\varphi\&\psi)=v(\varphi)\otimes v(\psi)$，$v(\varphi\to\psi)=v(\varphi)\to v(\psi)$；设$\varphi\in F(S)$，如果对任意$L$-赋值$v$均有$v(\varphi)=1$，则称$\varphi$为$L$-重言式，记为$\vDash_L\varphi$；如果$L$=[0,1]，简称$L$-重言式为1-重言式或重言式，相应地$\vDash_L\varphi$简记为$\vDash\varphi$。

定理 5(完备性定理)[9-10] 形式系统Łuk相对于标准MV-代数是完备的，即对任意的公式φ以下条件等价：

1) φ 是Łuk中的定理，即$\vdash\varphi$;

2) 对任意MV-代数L，φ是L-重言式，即$\vDash_L\varphi$;

3) 对任意线性MV-代数L，φ 是L-重言式，即$\vDash_L\varphi$;

4) 对标准MV-代数L，φ 是重言式，即$\vDash\varphi$。

由定理3、定理4及定义7可得如下定理。

定理 6 设(U,R)为近似空间，$(\mathrm{Sb}_r(U,);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，$\to_{\mathrm{ND}}$是ND型蕴涵算子，$\otimes_{\mathrm{ND}}$是$\mathrm{Sb}_r(U,R)$上的ND型模算子，则$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,\otimes_{\mathrm{ND}},\to_{\mathrm{ND}},\theta,I)$是一个MV-代数。

2 正则双Stone代数及其上的rough蕴涵

对于任意近似空间(U,R)，前面称$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\wedge,^*,^+,\theta,I)$为rough双Stone代数，实际上它是一个特殊的正则双Stone代数。本节将ND型蕴涵算子和ND型模算子推广到一般的正则双Stone代数，为下节建立基于rough集的逻辑系统做准备。

首先给出正则双Stone代数的有关概念和结论，它们主要来自文献[18-20]。

定义 9[18,19] 双Stone代数是一个满足以下条件的(2,2,1,1,0,0)型代数结构$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$：

1) $(L;\vee,\wedge,0,1)$是有界分配格；

2) 对任意$a\in L$，a^*是a的伪补，即$a\wedge x=0\Leftrightarrow x\leqslant a^*$；

3) 对任意$a\in L$，a^+是a的对偶伪补，即$a\vee x=1\Leftrightarrow a^+\leqslant x$；

4) 对任意$a\in L$，$a^*\vee a^{**}=1$，$a^+\wedge a^{++}=0$。

命题1[18,19] 在双Stone代数$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$中成立$(\forall a,b\in L)$：

1) $(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$，$(a\wedge b)^{**}=a^{**}\wedge b^{**}$；

2) $(a\vee b)^{**}=a^{**}\vee b^{**}$；

3) $(a\vee b)^+=a^+\wedge b^+$，$(a\vee b)^{++}=a^{++}\vee b^{++}$；

4) $(a\wedge b)^{++}=a^{++}\wedge b^{++}$；

5) $a=a^{**}\wedge(a\vee a^*)=a^{++}\vee(a\wedge a^+)$；

6) $a\wedge b=0\Leftrightarrow a^{**}\wedge b=0$；$a\vee b=1\Leftrightarrow a^{++}\vee b=1$；

7) $a\leqslant b\Rightarrow b^*\leqslant a^*$，$a\leqslant b\Rightarrow b^+\leqslant a^+$；

8) $a^{++}\leqslant a\leqslant a^{**}$；

9) $a^*\leqslant a^+$；

10) $a^{+*}=a^{++}$，$a^{*+}=a^{**}$；

11) $a^{+++}=a^+$，$a^{****}=a^*$。

对于双Stone代数$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$，子集$B(L)=\{x^*|x\in L\}$构成$L$的Boole子代数，称为$L$的中心。常用$D(L)$表示$L$的稠密集$\{x\in L|x^*=0\}$。对于$M\subseteq L$，记$M^+=\{x^+|x\in M\}$，$M^*=\{x^*|x\in M\}$。

定义 10 一个双Stone代数$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$称为是正则的，如果满足以下条件之一：

1) (RDSA) $\forall a$，$b\in L$，$(a^*=b^*,a^+=b^+)\Rightarrow a=b$；

2) (RDSA1) $\forall a$，$b\in L$，$a\leqslant b\Leftrightarrow(a^{**}\leqslant b^{**},a^{++}\leqslant b^{++})$；

3) (RDSA2) $\forall a$，$b\in L$，$a\wedge a^+\leqslant b\vee b^*$。

定理 7 设(U,R)为近似空间，$\mathrm{Sb}_r(U,R)$为全体rough集构成的族，则$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$是一个正则双Stone代数。

定理 8[18-20] 设$(B;\vee,\wedge,',0,1)$是Boole代数，F是B的滤子(F可以等于B)，记$(B,F)=\{(a,b)\in B\times B|a\leqslant b,b'\vee a\in F\}$，则$L=(B,F)$是$B\times B$的有界子格，且附加以下运算后构成一个正则双Stone代数$(a,b)^*=(b',b')$，$(a,b)^+=(a',a')$，$\forall(a,b)\in(B,F)$，并且$B(L)=\{(a,a)|a\in B\}$，$D(L)=\{(a,1)|a\in F\}$。反之，如果M是正则双Stone代数，令$B=B(M)$，$F=D(M)^{++}$，则映射$f:M\to(B,F)$和$x|\!\to(x^{++},x^{**})$是同构映射。

定理 9[15-20]　设$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$是正则双Stone代数，则必存在近似空间$(U,R)$使得$L$同构于完全rough集代数$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$。

注：上述结果即是文献[20]中的Corollary 4.2，虽与文献[15]中Proposition 2.3的表述略有不同，不过从后者的证明过程不难得到上述结果。

定义 11　设$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$是正则双Stone代数，在$L$上定义一元运算¬、二元运算→与⊗如下：

1) $\forall x\in L, \neg x=x^+\wedge(x\vee x^*)$；

2) $\forall x,y\in L$，$x\to y=(x^+\vee y)\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})$；

3) $\forall x,y\in L$，$x\otimes y=(x^{++}\wedge y)\vee(x\wedge y^{++})$。

对于正则双Stone代数，文献[13]中定理5.2.8、定理5.2.9、引理5.2.1、定理5.2.10均成立，以下直接引用这些结果。

定理 10　设$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$是正则双Stone代数，运算¬、→与⊗如定义11，则成立$(\forall x,y\in L)$：

1) $x\to y=(x^+\wedge x)\vee(x^+\wedge y^{**})\vee x^*\vee y$；

2) $x\otimes(x\to y)\geqslant x\wedge y$。

证明如下：

1)
$$x\to y=(x^+\vee y)\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})=$$
$$[x^+\vee(y\wedge y^{*+})]\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})=$$
$$\{[x^+\vee(y\wedge y^{*+})]\wedge x\}\vee\{[x^+\vee(y\wedge y^{*+})]\wedge x^*\}\vee$$
$$\{[x^+\vee(y\wedge y^{*+})]\wedge y^{*+}\}=$$
$$(x^+\wedge x)\vee(y\wedge y^{*+}\wedge x)\vee(x^+\wedge x^*)\vee(y\wedge y^{*+}\wedge x^*)\vee$$
$$(x^+\wedge y^{*+})\vee(y\wedge y^{*+}\wedge y^{*+})=$$
$$(x^+\wedge x)\vee(y\wedge y^{**}\wedge x)\vee(x^+\wedge x^*)\vee(y\wedge y^{**}\wedge x^*)\vee$$
$$(x^+\wedge y^{**})\vee(y\wedge y^{**})=$$
$$(x^+\wedge x)\vee(y\wedge x)\vee x^*\vee(y\wedge x^*)\vee(x^+\wedge y^{**})\vee y=$$
$$(x^+\wedge x)\vee(y\wedge x)\vee x^*\vee(x^+\wedge y^{**})\vee y=$$
$$(x^+\wedge x)\vee x^*\vee(x^+\wedge y^{**})\vee y=$$
$$(x^+\wedge x)\vee(x^+\wedge y^{**})\vee x^*\vee y$$

2)
$$x\otimes(x\to y)=$$
$$[x^{++}\wedge(x\to y)]\vee[x\wedge(x\to y)^{++}]=$$
$$\{x^{++}\wedge[(x^+\vee y)\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})]\}\vee$$
$$\{x\wedge[(x^+\vee y)\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})]^{++}\}=$$
$$\{[x^{++}\wedge(x^+\vee y)]\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})\}\vee$$
$$[x\wedge(x^+\vee y)^{++}\wedge(x^+\vee y^{*+})^{++}\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})^{++}]=$$
$$\{[(x^{++}\wedge x^+)\vee(x^{++}\wedge y)]\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})\}\vee[x\wedge$$
$$(x^{+++}\vee y^{++})\wedge(x^{+++}\vee y^{*+++})\wedge(x^{++}\vee x^{*++}\vee y^{*+++})]=$$
$$\{[0\vee(x^{++}\wedge y)]\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})\}\vee$$
$$[x\wedge(x^+\vee y^{++})\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{*+})]=$$
$$\{(x^{++}\wedge y)\wedge(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\}\vee$$
$$\{x\wedge[(x^+\vee y^{++})\wedge(x^+\vee y^{**})]\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})\}=$$
$$\{x^{++}\wedge[y\wedge(x^+\vee y^{**})]\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\}\vee[x\wedge(x^+\vee y^{++})\wedge$$
$$(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})]=$$
$$\{x^{++}\wedge y\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\}\vee[x\wedge(x^+\vee y^{++})\wedge$$
$$(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})]=$$
$$(x^{++}\wedge y)\vee[x\wedge(x^+\vee y^{++})\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})]=$$
$$[(x^{++}\wedge y)\vee x]\wedge[(x^{++}\wedge y)\vee(x^+\vee y^{++})]\wedge$$
$$[(x^{++}\wedge y)\vee(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})]=$$
$$x\wedge[(x^{++}\wedge y)\vee(x^+\vee y^{++})]\wedge[(x^{++}\wedge y)\vee(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})]=$$
$$x\wedge[(x^{++}\wedge y)\vee(x^+\vee y^{++})]\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})=$$
$$x\wedge\{[(x^{++}\vee y^{++})\wedge(y\vee y^{++})]\vee x^+\}\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})=$$
$$x\wedge\{[(x^{++}\vee y^{++})\wedge y]\vee x^+\}\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})=$$
$$x\wedge(x^{++}\vee y^{++}\vee x^+)\wedge(y\vee x^+)\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})=$$
$$x\wedge(y\vee x^+)\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y^{**})\geqslant$$
$$x\wedge(y\vee x^+)\wedge(x^{++}\vee x^*\vee y)=$$
$$x\wedge\{y\vee[x^+\wedge(x^{++}\vee x^*)]\}\geqslant x\wedge y$$

引理 1　在任意剩余格中成立：$\forall x,y\in L$，$x\otimes(x\to y)\leqslant x\wedge y$。

证明　由于：
$$[x\otimes(x\to y)]\to x\wedge y=$$
$$\{[x\otimes(x\to y)]\to x\}\wedge\{[x\otimes(x\to y)]\to y\}=$$
$$1\wedge\{x\to[(x\to y)\to y]\}=$$
$$(x\to y)\to(x\to y)=1$$
所以，$x\otimes(x\to y)\leqslant x\wedge y$。

注：1) 由定理10中(2)及引理1知，$\forall x,y\in L$，$x\otimes(x\to y)=x\wedge y$。本文中，$L$是任意正则双Stone代数，说明定义7中的条件2)成立。2) 文献[13]中例5.3.1有误，在文献[21]中已得到修正。

根据文献[13]中的定理5.2.8的(4)、定理5.2.9的(1)、定理5.2.10的(5)～(7)，以及本文定理10、引理1、定义7可得如下结论。

定理 11　设$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$是正则双Stone代数，运算→与⊗如定义11，则$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$是一个MV-代数。

定义 12　代数结构$(L;\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to,0,1)$称为RSL-代数，如果$(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$是正则双Stone代数，$(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$是MV-代数，且运算→与⊗由定义11确定。设$(U,R)$为近似空间，由定理7及定理6知$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\otimes_{\mathrm{ND}},\to_{\mathrm{ND}},\theta,I)$是一个RSL-代数，称为标准RSL-代数。

3　rough逻辑系统RSL

文献[2]建立了基于rough集的逻辑系统$\mathcal{L}$，其中用如下赋值函数赋予命题以⟨下近似,上近似⟩型的真

值(其中P为原子命题集、W为某论域)：$v:P\to 2^W\times 2^W$，$\forall p\in P$，$v(p)=\langle A,B\rangle$，$A\subseteq B$。

文献[2]将等式$v(p)=\langle A,B\rangle$解释为：命题p在所有A的情形下成立，而在任何B之外的情形下不成立。上述赋值函数v可进一步扩至所有公式之集Fml，即文献[2]中的函数mng:Fml$\to 2^W\times 2^W$。于是，根据$\mathcal{L}$中蕴涵式的定义，通过映射mng得到蕴涵公式$\varphi\to\psi$的真值为：

$$\mathrm{mng}(\varphi\to\psi)=\langle -B\cup C\cup(D\cap -B),-B\cup D\rangle$$

本文中，$\mathrm{mng}(\varphi)=\langle A,B\rangle$，$\mathrm{mng}(\psi)=\langle C,D\rangle$，“$-$”表示集合补运算，实际上导出了〈下近似,上近似〉型偶序对之间的一个蕴涵算子，即$\langle A,B\rangle\to\langle C,D\rangle=\langle -B\cup C\cup(D\cap -B),-B\cup D\rangle$。然而，该算子有明显的缺陷，如很容易举例说明等式$(f\to 0)\to 0=f$、$f\to(g\to h)=g\to(f\to h)$不被满足。本文中，0表示$\langle\varnothing,\varnothing\rangle$，$f$、$g$、$h$为任意〈下近似,上近似〉型偶序对。将上述蕴涵算子改进为ND型蕴涵，从前两节的结果看，$\to_{\mathrm{ND}}$有较好的性质。本节将基于此建立新的逻辑形式系统，并证明它的标准完备性定理。

定义 13 设原子命题集$S=\{p_1,p_2,\cdots,\}$，$F(S)$是S生成的$(^*,^+,\neg,\to)$型自由代数，$\perp$是命题常元。形式系统RSL中的公理由以下形式的公式组成：

$$(Ax1)\ \varphi\to(\psi\to\varphi)$$

$$(Ax2)\ (\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$$

$$(Ax3)\ (\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\psi\to\varphi)$$

$$(Ax4)\ ((\varphi\to\psi)\to\psi)\to((\psi\to\varphi)\to\varphi)$$

$$(Ax5)\ \varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*\to\varphi\wedge\psi^*,\varphi\wedge\psi^*\to\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*$$

$$(Ax6)\ \varphi\vee(\varphi\vee\psi)^+\to\varphi\vee\psi^+,\varphi\vee\psi^+\to\varphi\vee(\varphi\vee\psi)^+$$

$$(Ax7)\ \varphi\to\perp^*,\rrbracket^+\to\varphi$$

$$(Ax8)\ \perp^{**}\to\perp,\rrbracket\to\rrbracket^{++}$$

$$(Ax9)\ \rrbracket\to\varphi^*\vee\varphi^{**},\varphi^+\wedge\varphi^{++}\to\perp$$

$$(Ax10)\ \varphi\wedge\varphi^+\to\psi\vee\psi^*$$

$$(Ax11)(\varphi\to\psi)\to(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\varphi^+\vee\psi^{*+})\wedge(\varphi\vee\varphi^*\vee\psi^{*+}),$$

$$(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\varphi^+\vee\psi^{*+})\wedge(\varphi\vee\varphi^*\vee\psi^{*+})\to(\varphi\to\psi)$$

RSL中的推理规则为MP规则(即由φ及$\varphi\to\psi$推出ψ)。$\varphi\vee\psi$是$(\varphi\to\psi)\to\psi$的简写，$\varphi\wedge\psi$是$\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$的简写，$\rrbracket$是$\perp\to\perp$的简写。此外，用$\varphi\&\psi$表示$\neg(\varphi\to\neg\psi)$。

由上述定义容易看出，RSL中的公理$(Ax1)$～$(Ax4)$正好是Łuk的全部公理，因此Łuk的定理均是RSL的定理，如$\neg\varphi\to(\varphi\to\perp)$、$(\varphi\to\perp)\to\neg\varphi$均是定理。

注：定义13不同于文献[13]中的定义。而由文献[9-10]的结果，易知以下公式是形式系统RSL中的定理：

$$\varphi\wedge\psi\to\varphi,$$

$$\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi,$$

$$\varphi\to((\varphi\to\psi)\to\varphi\wedge\psi),$$

$$((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$$

即文献[13]定义5.2.8中的$(Ax2)$～$(Ax5)$均是RSL中的定理。从而，文献[13]中的定理5.2.12、定理5.2.13、定理5.2.14均成立。

于是有如下定理。

定理 12 设$[F]$是$F(S)$关于可证等价关系$\equiv$(其定义见文献[13]中的定义5.2.9)的商代数，则$([F];\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to,[\perp],[\rrbracket])$构成一个RSL-代数。本文中，$[F]$中序$\leqslant$的定义为：$\forall\varphi,\psi\in F(S)$，$[\varphi]\leqslant[\psi]$当且仅当$\vdash\varphi\to\psi$，而$[F]$上的运算为典型运算，$[\rrbracket]$表示系统RSL中的定理所在的等价类。

对于形式系统RSL，本文给出如下语义解释。

定义 14 设$(L;\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to,0,1)$是一个RSL-代数，函数$v$: $F(S)\to L$叫做一个L-赋值，如果v是$(\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to)$型同态，公式$\varphi\in F(S)$对任意$L$-赋值$v$均有$v(\varphi)=1$，则称$\varphi$是$L$-重言式，记为$\vDash_L\varphi$。

定义 15 设$F(S)$是形式系统RSL中的所有公式之集，(U,R)是一个近似空间。如果映射$v:S\to \mathrm{Sb}_r(U,R)$；$\forall p\in S$，$v(p)=\langle X_d,X_u\rangle$，$X\subseteq U$，保持运算$(\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to)$，即：

$\forall p,q\in S$，$v(p)=\langle X_d,X_u\rangle$，$v(q)=\langle Y_d,Y_u\rangle$，$X\subseteq U$，$Y\subseteq U$，

$$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q)=$$

$$\langle X_d,X_u\rangle\vee\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X_d\cup Y_d,X_u\cup Y_u\rangle;$$

$$v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q)=$$

$$\langle X_d,X_u\rangle\wedge\langle Y_d,Y_u\rangle=\langle X_d\cap Y_d,X_u\cup Y_u\rangle;$$

$$v(p^*)=v(p)^*=\langle X_d,X_u\rangle^*=\langle X_u',X_u'\rangle;$$

$$v(p^+)=v(p)^+=\langle X_d,X_u\rangle^+=\langle X_d',X_d'\rangle;$$

$$v(p\otimes q)=v(p)\otimes_{\mathrm{ND}}v(q)=\langle X_d,X_u\rangle\otimes_{ND}\langle Y_d,Y_u\rangle=$$

$$\langle X_d\cap Y_d,X_u\cap Y_u\cap(X_d\cup Y_d)\rangle;$$

$$v(p\to q)=v(p)\to_{\mathrm{ND}}v(q)=\langle X_d,X_u\rangle\to_{\mathrm{ND}}\langle Y_d,Y_u\rangle=$$

$$\langle X_u'\cup Y_d\cup(Y_u\cap X_d'),X_d'\cup Y_u\rangle$$

则称v为(U,R)上的一个赋值，$v(p)=\langle X_d,X\rangle$解释为：原子命题$p$在所有$X_d$的情形下成立，而在任何$X_u$之外的情形下不成立。上述赋值函数$v$可自然扩展到所有公式之集$F(S)$，仍称其为赋值。如果公式$\varphi\in F(S)$对任意赋值$v$均有$v(\varphi)=I=(U,U)$，则称$\varphi$是重言式，记为$\vDash\varphi$。

显然，(U,R)上的一个赋值实际上是标准RSL-代数$(\mathrm{Sb}_r(U,R);\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I)$上的赋值。

定理 13 (形式系统RSL的标准完备性定理)

形式系统RSL关于标准RSL-代数是完备的，即对任意公式$\varphi\in F(S)$，以下条件彼此等价：

1) φ是系统RSL中的定理，即$\vdash\varphi$;

2) φ对任意RSL-代数L来说是L-重言式，即$\vDash_L\varphi$;

3) φ对任意标准RSL-代数(即由某近似空间确定的)来说是重言式，即$\vDash\varphi$。

证明　由系统RSL的定义及文献[13]中的定理5.2.12、定理5.2.13、定理5.2.14，易于验证：对任意RSL-代数L，RSL中的每一公理都是L-重言式; 同时，MP规则保持重言式。所以由公理、MP规则推出的所有定理均是L-重言式，$\vdash\varphi\Rightarrow\vDash_L\varphi$，即1) $\Rightarrow$ 2)。

另一方面，如果φ对任意RSL-代数L来说是L-重言式，则由定理12知φ对RSL-代数W=([F];$\vee,\wedge,^*,^+,\otimes,\to$,[$\perp$],[$\top$])来说也是重言式，即对任意的$W$-赋值$v$有$v(\varphi)=[\varphi]=[\top]$，说明$\varphi$是系统RSL中的定理，即$\vdash\varphi$，所以2) $\Leftrightarrow$(1)。

2) $\Rightarrow$ 3)是显然的，下证3) $\Rightarrow$ 2)。

只需证明：若有公式φ对某个RSL-代数L来说不是L-重言式，则公式φ对某个标准RSL-代数来说也不是重言式。若φ对某个RSL-代数L来说不是L-重言式，则存在一个赋值v:$F(S)\to L$，$v(\varphi)\neq 1$。根据定理9，必存在一个近似空间(U,R)使得L与标准RSL-代数($\mathrm{Sb}_r(U,R)$;$\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I$)同构。设$f$是$L$与($\mathrm{Sb}_r(U,R)$之间的同构映射，则$v$与$f$的合成$f$Ð$v$是$(U,R)$上的赋值，从而($f$Ð$v$)($\varphi$)$\neq\theta$，即$\varphi$对于标准RSL-代数($Sb_r(U,R)$; $\vee,\wedge,^*,^+,\theta,I$)来说不是重言式。

4　结　语

本文研究了标准rough集模型的蕴涵算子问题，从偶序对⟨下近似,上近似⟩角度，引入一种新的rough蕴涵——ND型蕴涵算子，证明了它的良好性质，比如对应的非运算具有对合性，可诱导一个剩余t-模(即ND型模算子)，可构成MV-代数等。同时，将这样的ND型蕴涵算子拓展至一般正则双Stone代数中，得到类似结果。在此基础上，建立了基于rough集的逻辑形式系统RSL，证明它的标准完备性定理(即相对于由近似空间确定的标准RSL-代数来说是完备的)，说明了RSL是著名模糊逻辑系统Łuk的扩张，从而从一个特殊的视角揭示了rough逻辑与基于t-模的模糊逻辑的内在联系，使近年十分活跃的两个不同的非经典逻辑研究方向紧密地结合起来。

实际上，可以通过构造不同的rough蕴涵算子，基于这些rough蕴涵算子建立不同的逻辑系统，从而给出各种模糊逻辑形式系统的Rough集语义(已有系列成果，将另文发表)。

系统RSL不仅有上述理论上的重要意义，而且有一定应用价值。在此之前，rough蕴涵用来描述决策表中的决策规则，而本文中的ND型rough蕴涵是从rough集的偶序对⟨下近似,上近似⟩表示出发的，而⟨下近似,上近似⟩可以表示基于知识库的概念(包括模糊概念)，从而ND型rough蕴涵可以表达概念之间的关系，因此形式系统RSL可以作为近似推理的逻辑基础，根据已有概念间的联系导出潜在的知识及其联系。此外，本文构造蕴涵算子的方法对区间值模糊逻辑和直觉模糊逻辑也有一定参考价值。当然，如何挖掘系统RSL的应用价值并具体应用于知识处理领域，是值得进一步深入研究的问题。

参　考　文　献

[1] PAWLAK Z. Rough sets–theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] DÜTSCH I. A logic for rough sets[J]. Theoretical Computer Science, 1997, 179: 427-436.

[3] BANERJEE M. Logic for rough truth[J]. Fundamenta Informaticae, 2006, 71: 139-151

[4] 刘清. Rough集及Rough推理[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2003.
LIU Qing. Rough set and rough reasoning[M]. 2nded. Beijing: Science Press, 2003.

[5] DAI Jian-hua. Logic for rough sets with rough double stone algebraic semantics[C]//Proceedings of Tenth Interntional Conference on RSFDGrC 2005. Regina, Canada: Springer, 2005: 141-148.

[6] CATTANEO G, CIUCCI D. Algebraic structures for rough sets[J]. Transactions on Rough Sets II, LNCS 3135, 2004, 208-252.

[7] DUDIOS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209.

[8] YAO Y Y. Combination of rough and fuzzy sets based on α-level ses[C]//Rough Sets and Data Mining: Analysis for Imprecise Data. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997: 301-321.

[9] HAJEK P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Boston, USA: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[10] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2006.
WANG Guo-jun. Introduction of Mathematical logic and Resolution Principle[M]. 2nded. Beijing: Science Press, 2006.

[11] PEI Dao-wu. On equivalent forms of fuzzy logic systems

NM and IMTL[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138: 187-195.

[12] ZHANG Xiao-hong, HE Huacan, XU Yang. A fuzzy logic system based on schweizer-sklar t-norm[J]. Science in China: Series F Information Sciences, 2006, 49 (2): 175-188.

[13]张小红. 模糊逻辑及其代数分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
ZHANG Xiao-hong, Fuzzy logics and algebraic analysis[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[14] 秦克云, 涂文彪. 粗糙集代数与格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 2004, 39(6): 754-757.
QIN Ke-yun, TU Wen-biao. Rough set algebra and lattice implication algebra[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2004, 39(6): 754-757.

[15] DÜTSCH I. Rough sets and algebras of relations[C]// Incomplete Information: Rough set analysis. Heidelberg: Springer, 1997: 95-108.

[16] ZHANG Xiao-hong, MA Ying-cang, XUE Zhan-ao, et al. Implication operators based on rough set model over Boolean algebras[C]//2007 IEEE International Conference on Granular Computing. Silicon Valley, USA: IEEE Computer Sociaty, 2007: 186-191.

[17] ZHANG Xiao-hong, YAO Yi-yu, YU Hong. Rough implication operator based on strong topological rough algebras[J]. Information Sciences, 2010, 180(19): 3764-3780.

[18] DÜNTSCH I, WINTER M. Rough relation algebras revisited[J]. Fundamenta Informaticae, 2006, 74: 283-300.

[19] BLYTH T S. Lattices and ordered algebraic structures[M]. [S.l.]: Springer, 2005.

[20] COMER S. Perfect extensions of regular double stone algebras[J]. Algebra Universalis, 1995, 34: 96-109.

[21] WANG Yong-quan, ZHANG Xiao-hong. Some impli- cation operators on interval sets and rough sets[C]//Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics (ICCI ’09). Hong Kong: IEEE Computer Sociaty, 2009: 328-332.

[22] ZHU W. Generalized rough sets based on relations[J]. Information Sciences, 2007, 177: 4997-5011.

[23] ZHANG Xiao-hong. Rough algebras and fuzzy logic algebras[C]//Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Haikou, China: IEEE Computer Sociaty 2007: 213-216.

[24] ZHANG Xiao-hong, YAO Gang. Generalized rough set model on De Morgan algebras[C]//2007 IEEE International Conference on Granular Computing. Silicon Valley, USA: IEEE Computer Sociaty, 2007: 205-208.

编 辑 黄 莘