

· 机械电子工程 ·

## 认知不确定性的谐波齿轮减速器可靠性分析研究

杜 丽, 肖宁聪, 黄洪钟, 何俐萍, 李海庆

(电子科技大学机械电子工程学院 成都 611731)

**【摘要】**以航天器使用的谐波齿轮减速器为研究对象, 在不同信息来源的不确定性处理方法的基础上, 研究认知不确定性和客观不确定性同时存在时的概率——非概率可靠性混合模型。建立航天器使用的谐波齿轮减速器的可靠性分析模型, 并对模型中的参数进行了灵敏度分析。该方法不用搜索极限状态方程的设计验算点, 有较高的鲁棒性。

**关键词** 客观不确定性; 认知不确定性; 谐波齿轮; 可靠性分析; 灵敏度

中图分类号 V41

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.03.028

## Reliability Analysis Approach of Harmonic Drive under Epistemic Uncertainty

DU Li, XIAO Ning-cong, HUANG Hong-zhong, HE Li-ping, and LI Hai-qing

(School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

**Abstract** Since the constraints of various objective reasons and conditions, the lack of data exists in reliability engineering widely, especially in reliability-based design of aerospace. There is large amount subjective information exists in initialize data. Traditional reliability analysis method, such as probability-based method, can not handle the situation when both epistemic and aleatory uncertainties are presented in the system, the results acquired by probability-based method have large errors when used in practical engineering, sometimes may acquire a wrong result. This paper is aim at the spaceflight harmonic drive. After the sources of uncertainties and the method how to handle them are introduced, the mixture reliability analysis model of probability and non-probability are presented under both epistemic and aleatory uncertainties, and the reliability analysis model of harmonic drive is established while the sensitivity of parameters is given based on this reliability analysis model. Since the so called most probable point (MPP) search is not required, the proposed method is robust.

**Key words** aleatory uncertainty; epistemic uncertainty; harmonic drive; reliability analysis; sensitivity

随着航天技术的发展, 高可靠及长寿命航天产品已成为共同需求和发展趋势。目前, 在航天器设计中, 一般均要求其可靠工作时间为10年、15年甚至20年以上, 对航天器可靠性分析和设计提出了严峻的挑战。

太阳翼驱动机构和天线指向机构是卫星的常用机构<sup>[1]</sup>。由于谐波齿轮减速器具有承载能力高、质量轻、回差低(或是接近零回差)、减速比范围大等特点<sup>[2-3]</sup>, 被广泛地应用于太阳翼驱动机构和天线指向机构中。谐波齿轮减速器的可靠性在一定程度上决定了驱动机构和指向机构的可靠性。

目前, 国内外已经对谐波齿轮减速器的运动原理、运动精度、建模等<sup>[2,4]</sup>进行了广泛研究。然而,

对谐波齿轮减速器进行寿命估计时, 国内外的相关设计手册大多将影响谐波齿轮寿命的相关参数设为固定值<sup>[5]</sup>, 这可能会带来极大的误差。如谐波齿轮减速器的额定输出力矩通常在某个值的周围变动, 从而允许在某些情况下输出力矩可以发生改变。此外, 航天器中使用的谐波齿轮减速器运行环境恶劣, 且初始数据中通常包含着大量的主观信息。综上所述, 单纯的基于概率(随机)的可靠性分析方法已不能很好地解决这类实际工程问题, 需要一种能同时考虑认知不确定性和客观不确定性的可靠性分析方法。

近10余年来, 有关学者研究并考虑认知不确定性和客观不确定性的可靠性分析方法。文献[6]提出了一种区间变量及随机变量同时存在时基于一阶可

收稿日期: 2010-12-05; 修回日期: 2011-04-20

基金项目: 国防科技工业民用航天科研项目(4.1.3); 国家自然科学基金(51075061)

作者简介: 杜 丽(1970-), 女, 博士, 副教授, 主要从事机械可靠性设计方面的研究。

靠性方法(first order reliability method, FORM)的统一不确定性分析方法。文献[7]提出了在混合变量下的系统可靠性分析方法, 用模糊数描述系统认知不确定性。然而, 这些方法在处理方式和求解效率方面尚存在着许多不足。本文以航天器中使用的谐波齿轮减速器为研究对象, 应用区间分析, 提出一种同时处理认知不确定性和客观不确定性的系统可靠性建模方法。为了说明该方法的有效性, 采用蒙特卡罗仿真方法(Monte Carlo simulation, MCS)进行验证, 并对模型中的参数进行灵敏度分析。

## 1 不确定信息的表示和运算

### 1.1 基于概率的客观不确定性表示

在实际工程中, 不确定性信息随处可见。在可靠性分析中, 不确定性信息主要分为客观不确定性和认知不确定性两大类<sup>[8]</sup>。客观不确定性是事物固有的、本质上的不确定性, 可以用概率方法如分布函数等来描述, 这类不确定性是不能消除的。

#### 1.1.1 贝叶斯估计

设随机矢量  $\mathbf{X}$  的概率密度函数为  $f(\mathbf{X})$ ,  $f(\mathbf{X})$  属于概率密度函数空间  $\Theta_f$ , 其定义为:

$$\Theta_f \equiv \{f(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in R^n, f(\mathbf{X}) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1\}$$

设某随机参数  $\theta$  的先验密度为  $\pi(\theta)$ , 随机变量  $X$  的联合密度函数为  $p(x|\theta)$ , 则参数  $\theta$  的后验密度函数<sup>[9]</sup>为:

$$\pi(\theta|x) = P(x|\theta)\pi(\theta) / m(x) \quad (1)$$

式中,  $m(x)$  为边缘密度函数。

由于  $m(x)$  不依赖于  $\theta$ , 在计算  $\theta$  的后验分布中仅起到一个正则化因子的作用, 如果把  $m(x)$  省略, 则贝叶斯公式<sup>[9]</sup>改写为:

$$\pi(\theta|x) \propto P(x|\theta)\pi(\theta) \quad (2)$$

式中,  $\propto$  为不依赖于  $\theta$  的常数因子。

#### 1.1.2 一阶可靠性方法(FORM)

在可靠性分析中, 系统的失效概率定义为:

$$P_f = P_r[G(\mathbf{X}) < 0] \quad (3)$$

式中,  $G(\mathbf{X})$  为系统功能函数;  $\mathbf{X}$  为系统随机矢量。

设随机矢量的联合概率密度函数为  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ , 则系统失效概率为:

$$P_f = \Pr[G(\mathbf{X}) < 0] = \int_{G(\mathbf{x}) < 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

一般情况下, 直接用式(4)进行求解是不可行的。用FORM计算系统的失效概率分为<sup>[10]</sup>:

1) Nataf转换。通过Nataf转换, 把  $\mathbf{X}$  空间的随机矢量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  等价转换为标准  $\mathbf{U}$  空间

的随机矢量  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ <sup>[11]</sup>有:

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (5)$$

式中,  $\Phi^{-1}[\bullet]$  为标准正态累积分布函数的反函数;

$F_{X_i}(X_i)$  为随机变量  $X_i$  的累积分布函数。

2) 搜索极限状态方程的设计验算点(most probable point, MPP)。MPP点搜索是一个迭代优化过程, 表示如下:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{U}} \beta = \|\mathbf{U}\| \\ \text{s.t. } G(\mathbf{U}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $\|\bullet\|$  为随机矢量  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  的模;  $\beta$  为系统可靠性指标。

3) 计算系统的失效概率<sup>[12-13]</sup>。失效概率为:

$$P_f = \Pr[G(\mathbf{U}) \leq 0] = \Phi(-\beta) \quad (7)$$

式中,  $\Phi(\bullet)$  为标准正态累积分布函数。

用FORM求解系统的可靠度, 主要为搜索极限状态方程的MPP点。而MPP点搜索是一个循环迭代的优化过程, 需要大量的计算时间。在某些时候, 极限状态方程可靠性设计点不只一个, 或是根本搜索不到该方程的设计点。另外, 如果功能函数的非线性高, 形式复杂, 求解其导数是非常繁琐的。而基于样本的仿真法, 对极限状态方程没有特别要求, 也不要求功能函数存在导数, 更不需要搜索极限状态方程的MPP点, 因此, 在求解算法上具有一定的便利性和很好的鲁棒性。由于对系统失效贡献最大的样本点为MPP点和在极限状态方程边界周围的点<sup>[12]</sup>, 故在选择样本点时, 仅考虑在极限状态方程周围的点就可以使以下方程成立, 有:

$$G(\mathbf{X}) \approx 0 \quad (8)$$

再对这些样本点进行回归分析, 得到一原极限状态方程  $G(\mathbf{X}) = 0$  的线性切平面方程  $G_L(\mathbf{X}) = 0$ 。通常  $G_L(\mathbf{X}) = 0$  是一个超平面, 其失效概率近似地等于  $G(\mathbf{X}) = 0$  的概率。由于选择的样本点不用太多, 故能快速求出结果。

### 1.2 基于区间的认知不确定性表示

认知不确定性也称为主观不确定性, 处理认知不确定性常用的分析方法主要有贝叶斯方法、可能性理论、证据理论、区间方法和不精确概率等。由于区间方法的直观性和方便性, 本文拟采用区间来表示认知不确定性。

一个有界的区间可以表示为:

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \leq x \leq \bar{x}, x \in R\}$$

常用的区间运算通常包括并运算、平均运算、权值混合运算3种。

### 1.2.1 并运算

设变量  $x$  有  $n$  个不同信息来源  $[x_1, \bar{x}_1], [x_2, \bar{x}_2], \dots, [x_n, \bar{x}_n]$ , 并运算定义为:

$$[x_1, \bar{x}] \Delta [x_2, \bar{x}_2] \Delta \dots \Delta [x_n, \bar{x}_n] = [x, \bar{x}] \quad (9)$$

式中,  $\Delta$  为运算符;  $x = \min[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ;  $\bar{x} = \max[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$ 。

### 1.2.2 平均运算

对于  $n$  个不同的信息来源  $[x_1, \bar{x}_1], [x_2, \bar{x}_2], \dots, [x_n, \bar{x}_n]$ , 平均运算定义为:

$$[x_1, \bar{x}] \Delta [x_2, \bar{x}_2] \Delta \dots \Delta [x_n, \bar{x}_n] = [x, \bar{x}] \quad (10)$$

式中,  $\Delta$  为运算符;  $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ;  $\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$ 。

### 1.2.3 权值混合运算

对于  $n$  个不同的信息来源  $[x_1, \bar{x}_1, w_1], [x_2, \bar{x}_2, w_2], \dots, [x_n, \bar{x}_n, w_n]$ , 权值混合运算定义为:

$$[x_1, \bar{x}_1, w_1] \Delta [x_2, \bar{x}_2, w_2] \Delta \dots \Delta [x_n, \bar{x}_n, w_n] = [x, \bar{x}, 1] \quad (11)$$

式中,  $\Delta$  为运算符;  $w_i (i=1, 2, \dots, n)$  为相应区间所对应的权值系数, 且  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ;  $x = [w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n]$ ;  $\bar{x} = [w_1 \bar{x}_1 + w_2 \bar{x}_2 + \dots + w_n \bar{x}_n]$ 。

## 2 概率-非概率可靠性混合模型

### 2.1 基于区间分析的可靠性模型

设系统功能函数  $Z = G(\mathbf{Y})$ , 其中  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  为不相关区间矢量, 则  $Z$  也为一区间变量, 其均值和离差分别为  $Z^c$  和  $Z^r$ , 可靠指标为<sup>[14]</sup>:

$$\eta = Z^c / Z^r \quad (12)$$

根据式(12), 当  $\eta > 1$  时,  $G(\mathbf{Y}) > 0$ , 系统安全可靠; 当  $\eta < -1$  时,  $G(\mathbf{Y}) < 0$ , 系统失效; 当  $-1 < \eta < 1$  时,  $G(\mathbf{Y}) > 0$  和  $G(\mathbf{Y}) < 0$  均有可能, 即系统既可能安全, 也可能失效。由式(12)可知,  $\eta$  值越大, 系统的安全程度越高<sup>[14]</sup>。

### 2.2 概率-非概率可靠性混合模型

当系统同时存在认知不确定性和客观不确定性时, 如用随机变量表示客观不确定性, 区间变量表示认知不确定性, 则系统的功能函数既含有随机变量又含有区间变量, 此时系统的功能函数可表示为  $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , 其中  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  为随机矢量,  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  为区间矢量。若区间矢量  $\mathbf{Y}$  为常值矢量, 功能函数仅含随机矢量  $\mathbf{X}$ , 此时功能函数退化为随机可靠性问题, 则可用常规概率方法处理。若随机矢量  $\mathbf{X}$  为常值矢量, 功能函数仅含区间矢量

$\mathbf{Y}$ , 则应采用非概率方法进行处理<sup>[15]</sup>。

以如下线性功能函数为例, 有:

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m a_i X_i + \sum_{j=1}^n b_j Y_j \quad (13)$$

式中,  $X_i$  为独立正态随机变量,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $Y_j$  为不相关的区间变量,  $j=1, 2, \dots, n$ 。

当非概率可靠指标为  $\eta(X) > 1$  和  $\eta(X) < -1$ , 可分别求出系统的可靠指标  $\beta_{\min}$  和  $\beta_{\max}$ <sup>[15]</sup>:

$$\beta_{\min} = \left[ \sum_{i=1}^m a_i \mu_{x_i} + \sum_{j=1}^n (b_j y_j^c - |b_j| y_j^r) \right] / \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (14)$$

$$\beta_{\max} = \left[ \sum_{i=1}^m a_i \mu_{x_i} + \sum_{j=1}^n (b_j y_j^c + |b_j| y_j^r) \right] / \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (15)$$

根据式(14)、式(15)和式(7), 可得出系统的失效概率  $P_f^{\min} = \Phi(-\beta_{\max})$  和  $P_f^{\max} = \Phi(-\beta_{\min})$ , 由此可知, 系统的失效概率仍为区间变量  $P_f \in [P_f^{\min}, P_f^{\max}]$ 。

由于区间变量的不确定性, 系统极限状态方程  $G(\mathbf{X}) = 0$  的近似线性方程  $G_{L\max} = 0$  及  $G_{L\min} = 0$  之间的区域为不能精确确定的失效区域。  $G_{L\max}$ 、 $G_{L\min}$  及  $\beta_{\max}$ 、 $\beta_{\min}$  之间的关系如图1所示。

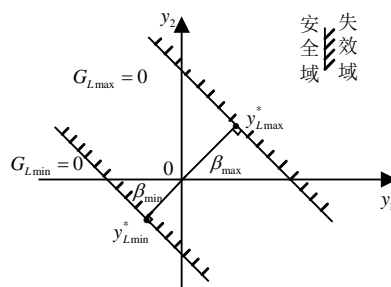


图1  $G_{L\max}$ 、 $G_{L\min}$  及  $\beta_{\max}$ 、 $\beta_{\min}$  的示意图

## 3 航天器用谐波齿轮减速器可靠性分析

### 3.1 谐波齿轮减速器的组成及传动原理

谐波齿轮减速器由波发生器(wave generator)、柔轮(flexspline)和刚轮(circular spline)等3个基本构件组成<sup>[3]</sup>, 如图2所示。

谐波齿轮减速器利用柔性元件的弹性变形转换传递运动和力矩。柔轮在凸轮的作用下产生变形, 从而使波发生器长轴两端的柔轮轮齿与刚轮轮齿完全啮合, 而短轴处轮齿完全脱开。在波发生器短轴和长轴之间, 有的轮齿逐渐进入啮合状态, 成为啮入; 有的逐渐进入脱开状态, 成为啮出。由于波发生器连续转动, 使啮入、啮合、啮出、脱开4种情况依次变化, 从而实现减速器连续转动<sup>[3]</sup>。

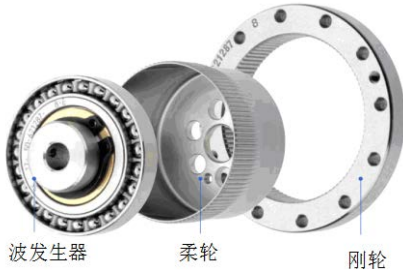


图2 谐波齿轮减速器组成示意图

### 3.2 谐波齿轮减速器可靠性建模

通常情况下, 谐波齿轮减速器的寿命主要由柔轮决定, 谐波齿轮减速器的寿命估计为<sup>[5]</sup>:

$$L_h = \frac{75 \times 10^5}{N_v} \left( \frac{T_H}{K_A T} \right)^3 \quad (16)$$

式中,  $L_h$  为预计寿命;  $T_H$  为额定输出转矩;  $N_v$  为实际输入转速;  $T$  为输出轴名义转矩;  $K_A$  为工况系数。

根据应力-强度干涉模型, 谐波齿轮减速器的功能函数为:

$$G(T_H, N_v, T, K_A, m) = \frac{75 \times 10^5}{N_v} \left( \frac{T_H}{K_A T} \right)^3 - 8\,760m \quad (17)$$

式中,  $m$  为设计预计运行年数;  $8\,760 = (365 \times 24)$  为一年总共的运行小时数。

当  $G > 0$  时, 系统可靠; 当  $G < 0$  时, 系统失效。系统的极限状态方程为  $G = 0$ 。

### 3.3 混合模型的可靠性分析

在传统的谐波齿轮减速器寿命分析中, 通常近似地使用一个精确的数值或均值表示设计变量, 这样会带来较大的误差, 导致不能有效地指导航天器的可靠性分析与设计。如在式(17)所示的谐波齿轮减速器寿命估计模型中, 取  $T_H = 350 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、 $N_v = 0.1 \text{ r/m}$ 、 $T = 2\,000 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、 $K_A = 1.3$ , 在设计寿命为 15 a 的条件下, 根据式(17)可以得到:

$$\frac{75 \times 10^5}{0.1} \left( \frac{350}{1.3 \times 2\,000} \right)^3 - 8\,760 \times 15 > 0 \quad (18)$$

由式(18)可知, 该系统是可靠的。然而, 在实际工程中, 式(17)中的参数为不确定性变量, 其中有些参数可以通过样本统计获取, 而有些参数由于缺乏样本数据只能获得其某个区间。对于谐波齿轮减速器, 由于额定输出转矩  $T_H$ 、工况系数  $K_A$  都有大量的样本数据并且容易进行测试, 可以假设它们服从正态分布, 即  $T_H \sim N(T_H, \sigma_{T_H}^2)$  和  $K_A \sim N(\mu_{K_A}, \sigma_{K_A}^2)$ 。对于实际输入转速  $N_v$  和输出轴名义转矩  $T$ , 由于空间环境多变, 同时受摩擦、辐射、太空杂质以及变形等各种因素的影响, 只能得到其可能的取值区间, 即  $N_v \in [N_v, \bar{N}_v]$  和  $T \in [T, \bar{T}]$ 。应该同时考虑认知不

确定性和客观不确定性对谐波齿轮减速器寿命的影响, 以使可靠性分析结果更符合实际且更加合理。

然而, 由于式(17)中两个参数为随机变量, 两个参数为区间变量, 系统的可靠性模型属于概率-非概率混合可靠性模型, 因此该系统的失效概率应该是一个区间而不是一个精确的数值。为了求取这个区间, 运用样本法先获得减速器的极限状态方程的近似线性超平面方程为:

$$G(T_H, N_v, T, K_A, m) \approx G_L = a_0 + a_1 T_H + a_2 K_A + a_3 T + a_4 N_v = 0 \quad (19)$$

式中,  $a_i$  为常数, 且设  $a_i > 0, i = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

根据式分别(14)、式(15)和式(19), 该系统可靠指标上下界可以表示为:

$$\beta_{\max} = \frac{\mu_{G_L}}{\sigma_{G_L}} = \frac{a_0 + a_1 \mu_{T_H} + a_2 \mu_{K_A} + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{N}_v}{\sqrt{(a_1 \sigma_{T_H})^2 + (a_2 \sigma_{K_A})^2}} \quad (20)$$

$$\beta_{\min} = \frac{\mu_{G_L}}{\sigma_{G_L}} = \frac{a_0 + a_1 \mu_{T_H} + a_2 \mu_{K_A} + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{N}_v}{\sqrt{(a_1 \sigma_{T_H})^2 + (a_2 \sigma_{K_A})^2}} \quad (21)$$

根据式(7)、式(20)和式(21), 系统的失效概率为:

$$P_f^{\min} = \Pr[G_{\max} < 0] \approx \Pr[G_{L\max} < 0] = \Phi(-\beta_{\max}) \quad (22)$$

$$P_f^{\max} = \Pr[G_{\min} < 0] \approx \Pr[G_{L\min} < 0] = \Phi(-\beta_{\min}) \quad (23)$$

式中,  $G_{L\max} = a_0 + a_1 T_H + a_2 K_A + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{N}_v$ ;  $G_{L\min} = a_0 + a_1 T_H + a_2 K_A + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{N}_v$ 。

## 4 可靠性灵敏度分析

可靠性灵敏度定义为失效概率对均值和方差的偏导数, 它反映了随机变量的均值和方差对结构可靠性的影响程度<sup>[13]</sup>。当随机变量均服从正态分布时, 变量  $X_i$  的可靠性灵敏度<sup>[10]</sup>为:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_f}{\partial \mu_i} = \frac{\phi(-\beta) y_i^*}{\beta \sigma_i} \\ \frac{\partial P_f}{\partial \sigma_i} = \frac{\phi(-\beta) (y_i^*)^2}{\beta \sigma_i} \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $\phi$  为正态概率密度函数, 即  $\phi(-\beta) = \exp(-\beta^2/2)/\sqrt{2\pi}$ ;  $y_i^*$  为随机变量  $X_i$  在标准正态分布空间的设计验算点所对应的  $y_i$  轴的坐标值。

由于系统失效概率为一区间, 因此采用系统平均失效概率对随机变量的均值和方差的偏导数表征灵敏度, 即有<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \mu_i} &= \frac{1}{2} \frac{(P_f^{\min} + P_f^{\max})}{\partial \mu_i} = \\ & \frac{1}{2} \left[ \phi(-\beta_{\max}) \frac{y_{i\max}^*}{\beta_{\max} \sigma_i} + \phi(-\beta_{\min}) \frac{y_{i\min}^*}{\beta_{\min} \sigma_i} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{2} \frac{(P_f^{\min} + P_f^{\max})}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{2} \left[ \phi(-\beta_{\max}) \frac{(y_{i\max}^*)^2}{\beta_{\max} \sigma_i} + \phi(-\beta_{\min}) \frac{(y_{i\min}^*)^2}{\beta_{\min} \sigma_i} \right] \quad (26)$$

当变量  $X$  为区间变量时, 根据可靠性灵敏度的定义<sup>[16]</sup>, 可以得到:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_f}{\Delta x} \approx \frac{P_f(x + \Delta x) - P_f(x)}{\Delta x} \quad (27)$$

式中,  $x_{\max}$  为最大失效概率所对应的值;  $x_{\min}$  为最小失效概率所对应的值。由于近似极限状态方程为线性, 所以  $x_{\max}$  和  $x_{\min}$  一般为对应区间的两个端点。

灵敏度分析结果能够为可靠性设计提供指导, 使设计人员明确某个参数对系统失效概率的影响最大。当灵敏度为正数时, 参数变大将导致系统失效概率变大, 为负数时, 则参数变大会导致系统失效概率变小, 所以在设计时要严格控制灵敏度为正的大参数的变化范围。

### 5 算例仿真

为了说明前述方法的计算步骤, 现给出某一谐波齿轮减速器的相关参数, 如表1和表2所示。假设工况系数服从均值未知、方差已知的正态分布  $K_A \sim N(\mu_{K_A}, 0.1^2)$ 。设均值  $\mu_{K_A}$  的先验分布为  $\mu_{K_A} \sim N(1.268, 0.08^2)$ 。为了求出均值  $\mu_{K_A}$  的贝叶斯估计值, 如咨询某专家将工况系数  $K_A$  取值为1.35。根据式(2)得  $\mu_{K_A}$  的贝叶斯估计为  $\hat{\mu}_{K_A} = 1.3$ 。采用本文提出的方法, 当表2中的变量取平均运算时, 计算出的谐波齿轮减速器的失效概率随时间变化的结果如表3所示。

表1 谐波齿轮减速器的参数分布

变量	均值	方差	分布
$T_H$	350	35	正态
$K_A$	$\mu_{K_A}$	0.1	正态

表2 谐波齿轮减速器参数估计及其运算结果

变量	信息源1	信息源2	结果	
			平均运算	并运算
$T$	[1 900,2 150]	[1 900,1 080]	[1 900,2 100]	[1 900,2 150]
$N_v$	[0.095,0.112]	[0.085,0.108]	[0.09,0.11]	[0.085,0.112]

表3 谐波齿轮减速器失效概率上下界随时间变化关系

	10 a	11 a	12 a	13 a	14 a	15 a
$P_f^{\min}$	0.008	0.015	0.025	0.038	0.058	0.079
$P_f^{\max}$	0.109	0.161	0.224	0.291	0.365	0.436

由表3可知, 当设计寿命为15年时, 采用寿命估算式(17)中各参数为固定值对谐波齿轮减速器进行可靠性分析, 得出系统可靠的结论; 然而在同时考虑认知不确定性和客观不确定性时, 得出系统的最大失效概率为0.436, 最小失效概率为0.079。

为了估计本文方法的计算精度和验证该方法的正确性, 本文采用大样本蒙特卡罗仿真方法对其进行验证, 其样本量为 $10^6$ 。通过仿真, 得到计算结果的最小误差为0.001, 最大误差为0.014, 其系统失效概率上下界与可靠度上下界及其蒙特卡罗仿真结果如图3和图4所示。图中, 本文提出的方法(proposed method)记为PM, 蒙特卡罗仿真记为MCS。

由图3和图4可知, 本文所提出的方法与大样本蒙特卡罗模拟得出的结果非常接近。然而, 蒙特卡罗模拟法一般需要较多的样本数据才能得出较为准确的结果, 同时需要花费大量的计算时间, 消耗大量的计算资源; 而本文所提出的方法只需要少量的重要样本点就可以较精确地得出系统极限状态方程的近似线性超平面方程。当表2中的区间变量取并运算时, 其计算和仿真结果与区间变量取平均运算时一致, 不再赘述。

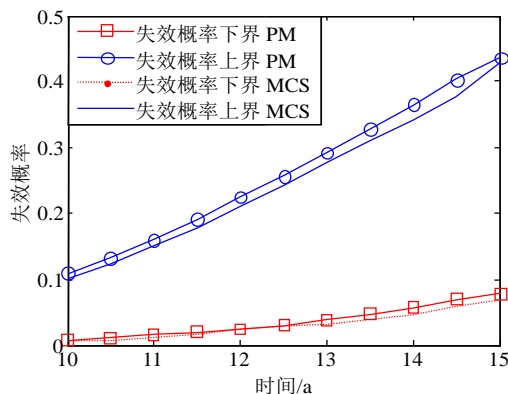


图3 用蒙特卡罗和本文方法得出的系统失效概率的对比图

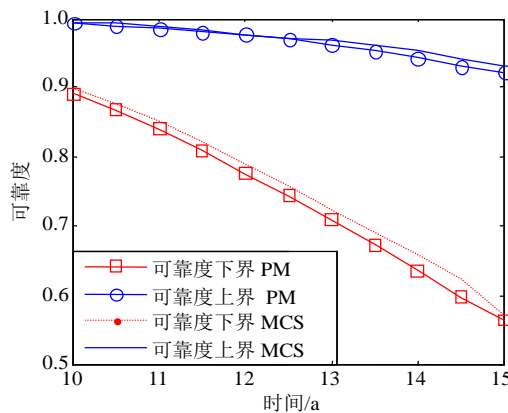


图4 用蒙特卡罗和本文方法得出的系统可靠度的对比图

谐波齿轮减速器可靠性灵敏度分析的计算结果如表4所示。由表4可知, 各参数的灵敏度计算结果

随寿命的变化非常小, 而且一旦确定了可靠性模型和参数分布概率密度函数, 参数的灵敏度就是一个不变的值。从分析结果可知, 参数中实际输入转速  $N_V$  对系统的可靠性影响最大。

表4 谐波减速器相关参数灵敏度计算结果

相关参数	灵敏度/a		
	15	14	13
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \mu_{\tau_i}}$	$-5.530 \times 10^{-7}$	$-5.841 \times 10^{-7}$	$-5.374 \times 10^{-7}$
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \sigma_{\tau_i}}$	$2.475 \times 10^{-8}$	$2.585 \times 10^{-8}$	$2.594 \times 10^{-8}$
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \mu_{\kappa_i}}$	0.047	0.046	0.048
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \sigma_{\kappa_i}}$	0.445	0.448	0.449
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial T}$	0.001 8	0.001 4	0.001 7
$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial N_V}$	17.85	13.40	12.65

## 6 结 论

本文介绍了不同信息来源的不确定性的处理办法, 研究了认知不确定性和客观不确定性同时存在时的概率-非概率可靠性混合模型, 建立了航天器用谐波齿轮减速器的可靠性分析模型, 并对模型中的参数进行了灵敏度分析。由于认知不确定性的影响, 谐波齿轮减速器随时间变化的可靠度和失效概率是一个区间而不是一个精确的值。当区间变量和随机变量同时存在时, 搜索方程MPP点是一个双重优化迭代过程, 需要大量的计算资源和时间, 在某些时候, 方程的可靠性设计点不只一个, 有时甚至根本搜索不到MPP点。因此, 基于搜索MPP点的可靠性分析方法的效率和鲁棒性都不高。由于本文所提出的方法不用搜索极限状态方程的MPP点, 因此有较高的计算效率和鲁棒性。该方法可以推广到其他领域的可靠性分析中。

### 参 考 文 献

[1] 屠善澄. 卫星姿态与动力学控制[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2006.  
TU Shan-cheng. Satellite attitude and dynamic control[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2006.

[2] GHORBEL F H, GANDI P S, ALPETER F. On the kinematics error in harmonic drive gears[J]. Journal of Mechanical Design, 2001, 123(1): 90-97.

[3] 周晖, 温庆平, 张伟文. 谐波减速器在空间飞行器中的应用[J]. 真空与低温, 2004, 10(4): 187-192.  
ZHOU Hui, WEN Qing-ping, ZHANG Wei-wen. Harmonic drive used in spacecraft[J]. Vacuum & Cryogenics, 2004, 10(4): 187-192.

[4] TAGHIRAD H D, BELANGER P R. Modeling and parameter identification of harmonic drive systems[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2009, 120(4): 439-444.

[5] 张黎骅, 郑严. 新编机械设计手册[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2008.  
ZHANG Li-hua, ZHENG Yan. New machine design handbook[M]. Beijing: People Posts & Telecommunications Publishing House Press, 2008.

[6] DU X. Unified uncertainty analysis by the first order reliability method[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(9): 1-10.

[7] ADDURI P R, PENMETSAR C. System reliability analysis for mixed uncertain variables[J]. Structural Safety, 2009, 31(5): 375-382.

[8] KIUREGHIAN A D. Analysis of structural reliability under parameter uncertainties[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(4): 351-358.

[9] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国计量出版社, 1999.  
MAO Shi-song. Bayesian statistics[M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 1999.

[10] GUO J, DU X. Reliability sensitivity analysis with random and interval variables[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78(13): 1585-1617.

[11] MELCHERS R E. Structural reliability analysis and prediction[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1999.

[12] MELCHERS R E, AHAMMED M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers and Structures, 2004, 82(1): 55-61.

[13] LU Z Z, SONG S F, YUE Z F, et al. Reliability sensitivity method by line sampling[J]. Structural Safety, 2008, 30(6): 517-532.

[14] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.  
GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou, FENG Yuan-sheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 56-60.

[15] 郭书祥, 吕震宙. 结构可靠性分析的概率和非概率混合模型[J]. 机械强度, 2002, 24(4): 524-526.  
GUO Shu-xiang, LÜ Zhen-zhou. Hybrid probabilistic and non-probabilistic model of structural reliability[J]. Journal of Mechanical Strength, 2002, 24(4): 524-526.

[16] 邱志平, 王晓军. 结构灵敏度分析的区间方法[J]. 兵工学报, 2005, 26(6): 798-802.  
QIU Zhi-ping, WANG Xiao-jun. An interval method for sensitivity analysis of structures[J]. Acta Armamentarii, 2005, 26(6): 798-802.

编辑 黄 莘