

# 等式状态约束下的粒子滤波算法

陈金广<sup>1,2</sup>, 李洁<sup>1</sup>, 高新波<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071; 2. 西安工程大学计算机科学学院 西安 710048)

**【摘要】**针对具有等式状态约束的非线性高斯系统滤波问题,在粒子滤波过程中,通过投影方法将状态向量投影到状态约束子空间,利用拉格朗日乘子法求解修正后的状态向量。由于在粒子滤波算法中可以针对状态估计或者粒子集修正,因此,对应了两种能够处理等式状态约束的粒子滤波方法。新方法 with 常规粒子滤波算法相比滤波误差明显降低。仿真结果验证了新方法的有效性。

**关键词** 非线性滤波; 粒子滤波; 投影方法; 状态约束

**中图分类号** TP391

**文献标识码** A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.04.025

## Particle Filtering with Equality State Constraints

CHEN Jin-guang<sup>1,2</sup>, LI Jie<sup>1</sup>, and GAO Xin-bo<sup>1</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University Xi'an 710071;

2. School of Computer Science, Xi'an Polytechnic University Xi'an 710048)

**Abstract** The paper aims at the problem of nonlinear Gaussian system filtering with state constraints. In particle filtering, state vector is projected to the state constrained subspace via projection method, and the modified state vector is evaluated using the Lagrange multiplier method. Because either state estimation or particles can be modified in the particle filtering, two new methods are given to deal with particle filtering with equality state constraints. The filtering errors of the new methods are lower than the that of general particle filter obviously. Simulation results verify the effectiveness of the new methods.

**Key words** nonlinear filtering; particle filter(PF); projection method; state constraints

在状态估计理论的实际应用中,状态向量可能包含某些线性或者非线性约束条件,如地面目标跟踪系统中,目标运动轨迹可能会受道路二维形状的约束;船舶沿海岸线航行过程中,会受海岸线物理位置的约束等。如果能够将这些固有的状态约束条件有效地施加到滤波过程中,理论上可以获得更高的滤波精度。针对线性系统的状态约束估计问题,人们在卡尔曼滤波的框架下做了很多研究,提出了相应的解决办法。最初,将状态约束作为量测噪声为0的最佳量测量,并将其融入滤波过程。但是该方法使得量测噪声矩阵变为奇异矩阵,从而可能会产生数值计算问题<sup>[1]</sup>。概率密度函数截断<sup>[2-3]</sup>(probability density function truncation, PDF truncation)方法从状态向量的约束边界上对概率密度函数进行截断,最终的约束状态向量估计等于截断之后的概率密度函数期望。该算法在计算过程中需要执行奇异值分解(singular value decomposition, SVD)和Gram-Schmidt正交化,因而运算量较大。水

平滑估计方法<sup>[4]</sup>(moving horizon estimation, MHE)采用最优化方法最小化估计偏差和测量偏差的平方和,该方法涉及最优化数值解法,计算量更大。估计投影方法<sup>[5]</sup>(estimate projection)针对状态向量为等式高斯分布的线性约束问题,将状态向量投影到约束子空间,从而获得具有约束的状态估计。该方法计算复杂度小,而且误差性能较好,是一种简单有效的基于Kalman滤波框架的解决方法。

近年来,粒子滤波算法在处理强非线性系统时能够取得更好的误差性能,受到越来越多学者的关注<sup>[6-8]</sup>。在这种研究背景下,本文考虑如何解决粒子滤波过程中具有等式状态约束的问题。考虑到估计投影方法计算量小而且易于实现,本文假设状态向量服从高斯分布,利用约束条件对粒子滤波过程中状态向量的二阶统计量进行修正。根据修正的对象不同,提出了两种方法。1)对每个粒子均使用估计投影方法进行修正;2)只对估计结果采用估计投影方法进行修正。由于方法1)针对每个粒子施加约束

收稿日期: 2009-11-22; 修回日期: 2010-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(60832005, 60702061); 教育部长江学者和创新团队支持计划(IRT0645); 陕西省教育厅科研计划(2010JK565)

作者简介: 陈金广(1977-), 男, 博士生, 主要从事信息融合、目标跟踪方面的研究。

条件,使粒子能够更好地表达状态向量的后验分布,从而能够获得更好的滤波精度。

## 1 问题描述

系统的动态方程和观测方程分别为:

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k \quad (2)$$

式中,  $f_k(\cdot)$  和  $h_k(\cdot)$  为状态转移函数和测量函数;  $\mathbf{v}_{k-1}$  和  $\mathbf{n}_k$  分别为过程噪声和量测噪声, 它们都是零均值高斯噪声, 方差分别为  $\mathbf{Q}_{k-1}$  和  $\mathbf{R}_k$ , 并且过程噪声和量测噪声互不相关。假定状态向量  $\mathbf{x}_k$  存在如下线性等式约束条件:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为已知状态约束矩阵;  $\mathbf{d}_k$  为已知向量。

从贝叶斯滤波角度来看, 目标是进行如下递推计算并获得各个时刻的状态向量估计。首先根据  $0 \sim k$  时刻观测量  $\mathbf{y}_{0:k}$  计算状态向量的概率密度分布, 即:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{0:k-1}) = \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k-1})p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{\int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k-1})p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_k} \quad (4)$$

为了使  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k})$  满足式(3), 通过对式(4)修正的方法实现。使用文献[2-5]中的方法都可以实现对式(4)的修正, 并能取得不错的效果。其中文献[5]的方法在状态向量为高斯分布的条件下, 计算过程简单, 运算量小, 而且精确程度较高, 因此本文选用文献[5]中的方法对状态向量进行修正。

接下来根据状态转移方程式(1)计算  $k+1$  时刻的一步预测分布为:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_{0:k}) = \int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k})d\mathbf{x}_k \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{x}_{0:k} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  表示  $0 \sim k$  时刻的信号;

$\mathbf{y}_{0:k} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$  表示  $0 \sim k$  时刻的观测。

## 2 具有状态约束的粒子滤波

粒子滤波算法是用大量的粒子及其权值来表示状态向量的后验分布, 当粒子数目无限大时, 可以无限逼近状态向量的后验分布。令  $\{\mathbf{x}_{0:k}^i, w_k^i\}_{i=1}^N$  表示对后验概率密度  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{0:k})$  进行了  $N$  次随机抽样, 其中,  $\{\mathbf{x}_{0:k}^i, i=1, 2, \dots, N\}$  表示  $k$  时刻粒子集中有  $N$  个粒子,  $w_k^i, i=1, 2, \dots, N$  表示第  $i$  个粒子的权值。此时,  $k$  时刻的后验概率密度可以近似为:

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_{0:k} - \mathbf{x}_{0:k}^i) \quad (6)$$

式中,  $\delta(\cdot)$  是Dirac Delta函数;  $w_k^i$  是经过归一化处

理的权值。

粒子权值要根据重要性抽样原理计算获得。下面给出粒子权值的计算过程。假定  $p(\mathbf{x}) \propto \pi(\mathbf{x})$  是一个难于采样的概率密度, 粒子可以通过一个易于抽样的提议函数(proposal function)  $q(\cdot)$  产生, 即  $\mathbf{x}^i \sim q(\mathbf{x}), i=1, 2, \dots, N$ 。概率密度函数  $p(\mathbf{x})$  通过下式加权近似为:

$$p(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^N w^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) \quad (7)$$

式中,  $w^i \propto \frac{\pi(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)}$  是第  $i$  个粒子的归一化权值。

式(6)中权值计算为:

$$w_k^i \propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^i | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}^i | \mathbf{y}_{1:k})} = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^i | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k-1}^i | \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (8)$$

由于

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} =$$

$$\frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) =$$

$$\frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \propto$$

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)得:

$$w_k^i \propto \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)p(\mathbf{x}_{0:k-1}^i | \mathbf{y}_{1:k-1})}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k-1}^i | \mathbf{y}_{1:k-1})} =$$

$$w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})} \quad (10)$$

如果只考虑  $k$  时刻的状态估计和观测, 忽略  $0 \sim k$  时刻的状态估计和观测对  $k$  时刻粒子权值的影响, 得:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)} \quad (11)$$

最后还需要对权值归一化处理, 即:

$$w_k^i = w_k^i \left( \sum_{j=1}^N w_k^j \right)^{-1} \quad (12)$$

若状态向量服从高斯分布, 则  $k$  时刻的状态估计及其协方差为:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i \mathbf{x}_k^i \\ \mathbf{P}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i (\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k) \end{cases} \quad (13)$$

下面考虑约束条件式(3)对状态向量的影响。如

果  $\tilde{\mathbf{x}}$  表示利用约束条件修正后的状态估计,  $\mathbf{W}$  表示任意对称的正定矩阵,  $\hat{\mathbf{x}}$  表示没有考虑约束条件前的状态估计, 则具有状态约束的估计问题就转化为下列优化问题:

$$\begin{cases} \min J(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \\ \text{s.t. } \mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{d} \end{cases} \quad (14)$$

采用拉格朗日乘子法求解式(14)。首先构建:

$$J(\tilde{\mathbf{x}}, \lambda) = (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) + 2\lambda^T (\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{d}) \quad (15)$$

对式(15)求偏导数, 并令其对各变量的偏导数等于0, 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{d} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

求解式(16)得:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{D}^T)^{-1} (\mathbf{D}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}) \quad (17)$$

这种修正状态估计的方法通常称为投影方法, 也就是把当前状态估计向约束子空间投影。在具有状态约束的粒子滤波算法中使用投影方法修正状态向量估计值, 可以直接利用式(17)修正式(13), 也可以直接对每一个带有权值的粒子利用式(17)进行修正, 因此获得了两种基于投影的具有状态约束的粒子滤波方法。如果状态向量服从高斯分布, 在最大化后验概率密度函数  $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  意义下有  $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$ , 在最小化均方误差意义下有  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  [5]。

在估计过程中, 可能会出现粒子退化 (degeneracy problem) 现象。粒子退化是指经过多次递推计算后, 大部分粒子权值都小到可以忽略不计的程度, 只有少数几个粒子权值较大。由于那些权值很小 (近似为0) 的粒子在滤波过程中几乎起不到作用, 粒子多样性特征得不到保证, 会严重影响滤波精度。为解决该问题, 通常的做法是计算等效粒子数  $N_{\text{eff}}$ , 如果等效粒子数小于某个阈值, 则采用重抽样算法对粒子重抽样形成新的粒子集 [6]。其中等效粒子数的计算公式为:

$$N_{\text{eff}} = \left( \sum_{i=1}^N (w_k^i)^2 \right)^{-1} \quad (18)$$

综上所述, 具有等式状态约束的粒子滤波算法总结如下。

方法1 输入为  $\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{y}_k$ , 输出为  $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{x}_k^i, w_k^i, \mathbf{P}_k$ 。

1) For  $s=1, 2, \dots, N$ 。用式(17)计算第  $s$  个粒子修正之后的值的  $\mathbf{x}_k^s$ ; 式(1)计算第  $s$  个粒子下一时刻

的状态预测值  $\mathbf{x}_{k+1|k}^s$ ; 式(11)计算粒子权值。

End For

2) 使用式(12)将权值归一化。

3) 使用式(13)计算  $k$  时刻的状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_k$  及其方差  $\mathbf{P}_k$ 。

4) 使用式(18)计算有效粒子数, 如果有效粒子数小于某个阈值, 则进行重抽样。

方法2 输入为  $\mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i, \mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{y}_k$ , 输出为  $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{x}_k^i, w_k^i, \mathbf{P}_k$ 。

1) For  $s=1, 2, \dots, N$ 。使用式(1)计算第  $s$  个粒子下一时刻的状态预测值  $\mathbf{x}_{k+1|k}^s$ ; 式(11)计算粒子权值。

End For

2) 使用式(12)将权值归一化。

3) 使用式(13)计算  $k$  时刻的状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_k$  及其方差  $\mathbf{P}_k$ 。

4) 使用式(17)计算状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_k$  的修正值  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 。

5) 使用式(18)计算有效粒子数, 如果有效粒子数小于某个阈值, 则进行重抽样。

上述算法中只考虑了状态约束为线性的情况, 对于非线性状态约束, 可以直接使用文献[9]中的方法, 也可以采用泰勒展开 [5, 10], 从而将非线性问题转化为线性问题, 然后再利用上述算法加以解决。

文献[11]在多目标跟踪环境下提出了两种用于不等式状态约束的粒子滤波方法。一种是将不等式约束施加到粒子权值上, 将那些不符合不等式约束的粒子相应的权值赋值为0。然而该方法会使更多的粒子权值等于0, 减小了滤波过程中粒子的多样性特征, 从而降低了滤波性能。另外一种方法是改变系统的过程噪声, 使产生的粒子都符合约束条件。然而该方法能否直接应用与具体的约束条件相关, 如文献[11]中对目标运动各个方向上的加速度进行约束, 而加速度和系统过程噪声方差直接相关, 所以可以直接对过程噪声方差进行改变并满足约束条件。如果约束包含了其他分量, 如目标位置, 就不能通过修改过程噪声并使其满足状态约束要求, 也就不能直接使用该方法。但是该方法的特点是状态向量可以是非高斯分布, 而本文算法假设状态向量为高斯分布, 因此能够取得较好的效果。如果是非高斯分布, 那么算法性能会有不同程度退化。本文方法和文献[11]中方法的思路是完全不同的, 使用条件也不相同。

### 3 仿真实验及结果分析

假设目标在  $x$ - $y$  平面内以原点为圆心,  $r=100$  m

为半径做圆周运动。目标运动角速度  $\dot{\theta} = 5.7 \text{ deg/s}$  , 目标初始状态向量为  $\mathbf{x}_{k=0} = [\xi \ \dot{\xi} \ \zeta \ \dot{\zeta}]^T = [100 \ 0 \ 0 \ 10]^T$  , 有一个传感器对目标进行测量跟踪, 传感器的位置为  $(x_s, y_s) = (0, 0)$  , 采样间隔为  $T = 1 \text{ s}$  , 测量方程为:

$$r_k = \sqrt{(\xi_k - x_s)^2 + (\zeta_k - y_s)^2} + v_k \quad (19)$$

$$\theta_k = \text{atan}\left(\frac{\xi_k - x_s}{\zeta_k - y_s}\right) + v_{\theta_k} \quad (20)$$

跟踪采用的目标状态转移方程为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \mathbf{n}_k \quad (21)$$

式中, 过程噪声  $\mathbf{n}_k$  和量测噪声  $\mathbf{v}_k$  都服从零均值高斯分布, 方差分别为  $\mathbf{Q} = \text{diag}([2 \ 2])$  和  $\mathbf{R} = \text{diag}([7^2 \ 0.01^2])$  , 并且两者不相关。状态向量初始值  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$  , 相应协方差为  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([5^2 \ 1^2 \ 5^2 \ 1^2])$  。假定在跟踪过程中有如下位置约束:

$$g(\mathbf{x}_k) = \xi_k^2 + \zeta_k^2 = 100^2 \quad (22)$$

仿真步数为120步, 目标绕原点旋转两周。

由于式(22)是非线性约束, 需要对其作线性化处理。也就是首先计算  $g(\mathbf{x}_k)$  的雅可比矩阵, 使其符合式(3)形式, 然后再使用式(17)计算状态估计值的修正值。

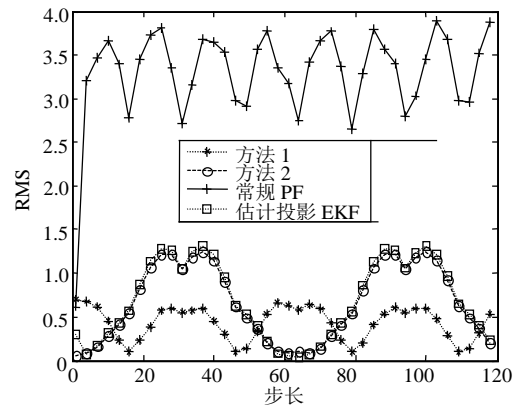
跟踪所使用的状态转移方程和目标真实运动方程差异很大, 目的是为了更清楚地展示本文算法的优点。如果直接采用PF滤波, 误差较大。如果状态转移方程和目标真实运动方程差异较小, 本文算法仍然能够提高滤波精度, 但提高的幅度会小一些。

### 实验1 误差性能分析。

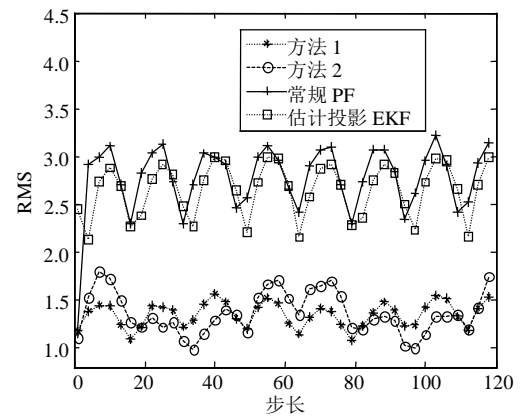
分别采用方法1、方法2、常规PF以及文献[5]中的估计投影EKF方法对跟踪目标。其中, 参与粒子滤波的粒子数为1 000, Monte Carlo仿真50次, 计算不同时刻的均方根误差(root mean square, RMS)。其中, 位置分量的RMS计算公式为:

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ((\xi_k^i - \hat{\xi}_k^i)^2 + (\zeta_k^i - \hat{\zeta}_k^i)^2)} \quad (23)$$

式中,  $\hat{\xi}_k^i$  和  $\hat{\zeta}_k^i$  表示第  $i$  次Monte Carlo仿真过程中  $k$  时刻目标位置的估计值;  $\xi_k^i$  和  $\zeta_k^i$  表示相应时刻目标位置的真实值;  $M$  表示Monte Carlo仿真次数。速度分量的RMS与式(23)类似。



a. 位置误差



b. 速度误差

图1 不同时刻均方根误差

图1a和1b表明, 算法误差性能由高到低依次是方法1、方法2、估计投影EKF、常规PF。本文方法与普通粒子滤波算法误差性能相比有较大幅度提高, 这是因为在滤波过程中加入了状态约束条件, 缩小了状态估计空间, 从而提高了滤波精度; 与估计投影EKF算法误差性能相比也有不同程度提高, 这是因为本文算法本质上还是粒子滤波算法, 而粒子滤波是一种比EKF精度更高的估计方法, 在使用投影方法对粒子滤波状态向量施加有效约束后, 能够取得较好的滤波精度。

由测量模型易知, 一方面, 测量误差具有周期性; 另一方面, 跟踪所使用的约束条件的位置分量也具有周期性, 从而使图1中滤波误差变化呈现周期性。针对这种周期性和滤波结果误差大小的互补性, 可以融合方法1和方法2以获得更好的误差性能。然而, 融合策略需要视具体问题而定, 不具有一般性。此外, 图1表明, 4种方法的误差变化周期有所不同, 原因如下: 由于状态约束只和目标位置相关, 因此各种方法的速度分量误差的周期相同, 并且也和常规PF算法位置误差的周期相同; 而在位置分量上施

加状态约束后,由于约束分量的周期性,使位置分量的误差周期发生改变。方法2和估计投影EKF方法对状态向量估计值的修正时机相同,因此其位置分量滤波误差周期相同;而方法1是针对每个粒子进行修正,因此该方法与其他方法的位置分量误差周期不相同。

注意到在图1a中的1、60和120时刻附近,方法1比其他方法误差大,但是在图1b中的相应时刻,方法1的误差却比其他方法误差小。因此不能简单地断定在上述时间范围内方法1误差性能低于其他方法。除上述情况之外,方法1的位置分量和速度分量误差性能都明显好于其他方法。由以上分析可知,方法1在上述4种方法中滤波精度最高。

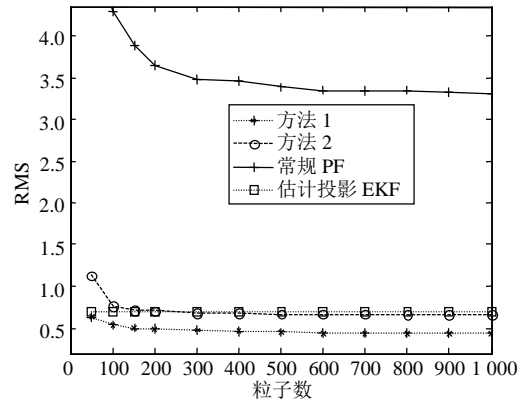
实验2 算法性能受粒子数影响分析。

为了考察粒子数对各种粒子滤波算法误差性能的影响,将粒子数作为粒子滤波算法的参数,粒子数依次选取为{50,100,150,200,300,⋯,1 000}。使用不同的粒子数作为参数参与运算,仿真120步,采用Monte Carlo方法循环执行50次,计算出使用不同粒子数后不同方法估计结果的均方根误差(RMS)。此时,位置RMS定义为:

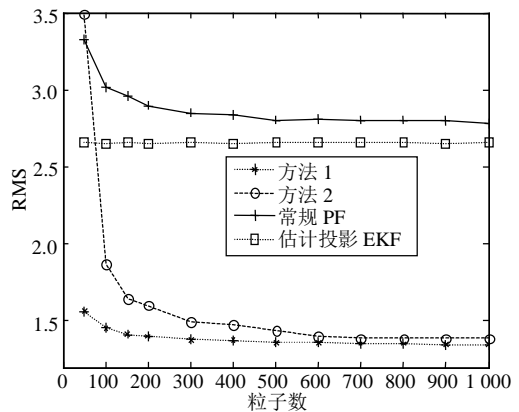
$$S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ((\xi_k^i - \hat{\xi}_k^i)^2 + (\zeta_k^i - \hat{\zeta}_k^i)^2)} \quad (24)$$

其中, $N$ 表示仿真步数,其他参数的含义与式(23)中的参数含义相同。

实验结果如图2所示,由于估计投影EKF方法滤波过程与粒子数没有关系,所以图中显示的误差结果近似一条直线。图2a和图2b表明,尽管粒子数不相同,各种算法误差性能的优劣和实验1的结果一致,并且各种粒子滤波算法随着粒子数不断增大,误差不断减小。但是当粒子数增加到200以上时,各种方法本身的误差大小基本保持一致,也就是说当粒子数大到一定程度后,算法本身的误差性能改善很微弱,使用较多的粒子已经很难有效改善滤波性能了。在粒子数小于200的情况下,注意到方法1比其他方法表现更出色,尤其是在粒子数选取特别少(小于50)的情况下,其他算法的状态估计结果可能已经发散,而方法1仍然能够将误差保持在较小的范围内。这是因为在使用状态转移方程对粒子进行传播之前,使用状态约束函数将各个粒子投影到约束子空间中,粒子集在较小的空间中表征向量分布,因此在状态转移之后能够更好地逼近状态分布的后验概率。



a. 位置误差



b. 速度误差

图2 不同粒子数下各种粒子滤波算法的均方根误差

为考察新算法的时间复杂度,对实验执行时间进行统计,结果表明,采用1 000个粒子,方法1执行120步需要37 s,方法2完成同样的过程需要32 s,而常规粒子滤波算法需要31 s。其中仿真使用的计算机CPU(双核)主频为1.6 GHz,内存为1 GB。可以看出本文两种算法与常规粒子滤波算法相比,时间复杂度增加幅度不大。本文两种新方法的时间复杂度结果表明,方法1的较高的滤波精度需要以较高的时间复杂度作为代价。

## 4 结论

本文针对具有状态约束的非线性滤波问题,采用将状态向量或者粒子集向约束子空间投影的方法,从而获得基于投影的状态约束粒子滤波算法。本文的贡献在于对粒子滤波算法做了有益补充。实际上,考虑到状态转移函数的过程噪声也受到状态约束条件的限制,也可以针对粒子滤波过程的噪声方差施加约束,获得相应的系统投影算法<sup>[12]</sup>,进一步提高滤波误差性能。本文主要解决线性等式约束的问题,对于弱非线性等式约束,可以首先通过线性化将其转换为近似线性等式约束。但是需要注意

的是, 对于强非线性等式约束问题, 线性化会产生较大误差, 从而滤波结果也会出现较大误差。

### 参 考 文 献

- [1] SIMON D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(8): 1303-1318.
- [2] SIMON D. Optimal State Estimation[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006: 218-222.
- [3] SIMON D, SIMON D L. Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation[J]. IEE Proceedings of Control Theory and Applications, 2006, 153(3): 371-378.
- [4] MICHALSKA H, MAYNE D. Moving horizon observers and observer based control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(6): 995-1006.
- [5] SIMON D, CHIA T. Kalman filtering with state equality constraints[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1): 128-136.
- [6] GORDON N, SALMOND D, SMITH B A F. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proceedings F: Radar Signal Process, 1993, 140(2): 107-113.
- [7] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDON N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [8] CAPPE O, GODSILL S J, MOULINES E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 899-924.
- [9] 陈金广, 李洁, 高新波. 一种迭代收缩非线性状态约束滤波算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2011, 38(1): 104-109.  
CHEN Jin-guang, LI Jie, GAO Xin-bo. Iterative shrinking filtering algorithm with nonlinear state constraints[J]. Journal of Xidian University, 2011, 38(1): 104-109.
- [10] YANG C, BLASCH E. Kalman filtering with nonlinear state constraints[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1): 70-83.
- [11] BOERS Y, DRIESSEN H. Particle filter track-before-detect application using inequality constraints[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(4): 1481-1487.
- [12] KO S, BITMEAD R R. State estimation for linear systems with state equality constraints[J]. Automatica, 2007, 43(8): 1363-1368.

编辑 漆 蓉