

# 数字图像的0~1阶Riemann-Liouville分数阶微分增强模板

陈庆利<sup>1,2</sup>, 蒲亦非<sup>1</sup>, 黄果<sup>1</sup>, 周激流<sup>1</sup>

(1. 四川大学计算机学院 成都 610065; 2. 乐山师范学院计算机科学学院 四川 乐山 614004)

**【摘要】**提出了一种数字图像的0~1阶分数阶微分增强模板。从Riemann-Liouville分数阶积分定义出发推导出0~1阶Riemann-Liouville分数阶微分方程及其离散化方程;构造了x轴负方向、x轴正方向、y轴负方向、y轴正方向、左下对角、左上对角、右下对角、右上对角8个相互中心对称方向的分数阶微分模板,并讨论了这8个方向分数阶微分模板的数值运算规则;讨论图像的熵和微分阶次之间的关系,并根据熵值最终确定使图像增强效果最好的微分阶次。实验表明能比较明显地增强图像的纹理和边缘细节,增强后的图像清晰度提高,图像视觉效果明显;对高斯平滑后的图像的增强效果也十分明显。

**关键词** 分数阶微分; 熵; 图像增强; Riemann-Liouville分数阶微分; 模板卷积; 纹理

中图分类号 TP202<sup>+</sup>.1

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.05.026

## 0~1 Order Riemann-Liouville Fractional Differential Enhancing Mask of Digital Image

CHEN Qing-li<sup>1,2</sup>, PU Yi-fei<sup>1</sup>, HUANG Guo<sup>1</sup>, and ZHOU Ji-liu<sup>1</sup>

(1. School of Computer, Sichuan University Chengdu 610065; 2. School of Computer Science, Leshan Normal University Leshan Sichuan 614004)

**Abstract** An image enhancement algorithm based on 0~1 order Riemann-Liouville fractional differential is presented in this paper. The Riemann-Liouville differential equation and its discretization form are deduced from the Riemann-Liouville definition. According to the discretization equation, the structures and parameters of eight fractional differential masks are constructed respectively. The numerical implementation algorithms of the eight differential masks are discussed too. Finally, the relationships between the entropies of enhanced images with the orders are discussed, then, the most optimal order is obtained. The computer experiments show that the algorithm has excellent feedback for nonlinearly enhancing the textural details of the digital image and it can obviously enhance texture details and edges, the enhanced images have markedly visual effect enhance capabilities of the Gaussian smoothed images are also obvious too.

**Key words** fractional differential; entropy; image enhancement; Riemann-Liouville fractional calculus; template convolution; texture.

图像是记录和传递信息的重要载体和手段,由于多种原因,图像在生成、传输和变换的过程中会产生质量下降和特征淹没现象,对图像分析和识别带来困难。因此,改善图像的视觉效果,提高图像清晰度,丰富图像信息量,加强图像判读和机器识别效果,是现代图像处理的主要内容。数字图像邻域内,像素之间的灰度值具有很强的相关性,通常以复杂的纹理特征表现出来。采用基于空域的传统整数阶方法增强图像的纹理信息,其整数阶微分结果约等于零<sup>[1-3]</sup>,必然会使纹理细节大幅线性衰减,造成图像的边缘轮廓、纹理细节等变得模糊不清<sup>[1,4-5]</sup>。因此,既要大幅提升图像边缘和加强纹理细节,又要非线性保留平滑区域,成为图像增强研究的热点和难点问题。

分数阶微积分是描述分数维空间的有力工具,是分析和处理许多“非”问题、“非”现象,如非线性、非因果、混沌等的数学工具和建模工具,已在非线性动力学、自动化控制以及材料力学等领域得到广泛应用,特别是在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的效用<sup>[6]</sup>。在频域内,对信号进行分数阶微分发现<sup>[7-10]</sup>: 1) 图像分数阶微分具有特殊的Mach现象<sup>[3,5,11]</sup>,其拮抗特性具有特殊的生物视觉感受野模型<sup>[1-2,4-5,12]</sup>; 2) 直流或低频信号的分数阶微分值一般不为零,这是分数阶微分与整数阶微分的最大不同<sup>[2,4-5,12-14]</sup>。由于数字图像相邻像素之间的灰度值具有高度的自相似性,并以复杂的纹理细节特征作为其表现形式,对信号进行分数阶微分处理既能大

收稿日期: 2010-06-13; 修回日期: 2010-11-02

基金项目: 国家自然科学基金(60972131)

作者简介: 陈庆利(1975-),男,博士生,主要从事分数阶微分理论及应用的研究。

幅提升信号的高频分量, 又能在一定程度上非线性地加强信号的中频分量, 并非线性地保留信号的低频和直流分量<sup>[1-6,12]</sup>。

本文根据Riemann-Liouville分数阶积分的定义推导出Riemann-Liouville分数阶微分方程, 构造出0~1阶Riemann-Liouville分数阶微分算子; 给出8个不同方向上的 $n \times n$ 分数阶微分模板规则, 并讨论了其数值运算规则; 通过计算不同微分阶次下图像的熵, 确定使图像增强效果最好的微分阶次范围。实验表明, 该分数阶微分算子能比较明显地增强图像的纹理和边缘细节, 使增强后的图像清晰度提高, 图像视觉效果明显, 并且对高斯平滑后的图像的增强效果也十分明显。

### 1 Riemann-Liouville 0~1阶分数阶微分图像增强算子构造

信号  $s(x) \in [a, x]$  ( $a < x, a \in R, x \in R$ ) 的  $\nu$  阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为<sup>[13-14]</sup> :

$${}_a D_x^\nu s(x) = \frac{d^\nu s(x)}{[d(x-a)]^\nu} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\nu-1} s(\xi) d\xi \quad \nu < 0 \quad (1)$$

式中,  ${}_a D_x^\nu$  表示基于Riemann-Liouville定义的分数阶积分算子;  $a$ 和 $x$ 分别为积分下限和上限,  $R$ 为实数集。对于任意的正整数 $n$ 和任意的实数 $\nu$ 有:

$${}_a D_x^\nu s(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^{\nu-n} s(x)}{[d(x-a)]^{\nu-n}} = \frac{d^n}{dx^n} [{}_a D_x^{\nu-n} s(x)] \quad (2)$$

因此, 根据式(1)和式(2), 可推导出信号  $s(x)$  的  $\nu$  阶 Riemann-Liouville 分数阶微分为:

$${}_a D_x^\nu s(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\nu} s^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\nu+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x \frac{s^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\nu-n+1}} d\xi \quad 0 \leq \nu < n \quad (3)$$

式中,  $d^n/dx^n$  为整数阶微分,  $n$  是满足  $\nu-n < 0$  的最小整数。特别地, 当  $a=0, n=1$  时, 可推导得:

$${}_a D_x^\nu s(x) = \frac{x^{-\nu} s(0)}{\Gamma(1-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{s^{(1)}(\xi)}{(x-\xi)^\nu} d\xi \cong \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left[ \frac{s(0)}{x^\nu} + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx/N}^{(k+1)x/N} \left( \frac{d}{d\xi} s(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi^\nu} \right) \right] \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (4)$$

不失一般性, 令  $a=0$ , 将信号  $s(x)$  的持续期  $[0, x]$  分为  $N$  等分, 则共有  $N+1$  个因果节点, 将这些节点定义为:  $S_N = s(0), S_{N-1} = s(x/N), \dots, S_k = s(x-kx/N), \dots,$

$S_0 = s(x)$ 。由一阶导数的差分近似公式可推导得如下近似公式:

$$\int_{kx/N}^{(k+1)x/N} \left( \frac{d}{d\xi} s(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi^\nu} \right) \cong \frac{s\left(x-\frac{kx}{N}\right) - s\left(x-\frac{x}{N}-\frac{kx}{N}\right)}{x/N} \int_{kx/N}^{(k+1)x/N} \frac{d\xi}{\xi^\nu} = \frac{x^{-\nu} N^\nu}{1-\nu} (s_k - s_{k+1}) [(k+1)^{1-\nu} - k^{1-\nu}] \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)可得:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} s(x) = \frac{x^{-\nu} N^\nu}{\Gamma(2-\nu)} \frac{(1-\nu) s_N}{N^\nu} + \frac{x^{-\nu} N^\nu}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (s_k - s_{k+1}) [(k+1)^{1-\nu} - k^{1-\nu}] \right\} \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (6)$$

由于计算机处理的对象是数值有限的数字量, 且图像灰度变化发生的最短距离是在相邻像素之间, 二维数字图像在各个方向上只能以像素为刻画单位, 其最小等分间隔为  $h=1$ 。因此, 当  $k=n \leq N-1$  时, 可由式(6)分别推导出二维数字图像  $s(x,y)$  在  $x$  和  $y$  坐标轴负方向(分别用  $W_x$ -和  $W_y$ -表示)上的分数阶偏微分的后项差分公式, 其前  $n+1$  项的近似表达式分别为:

$$\frac{\partial^\nu s(x,y)}{\partial x^\nu} \cong \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} s(x,y) + \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)^{1-\nu} - 2k^{1-\nu}] s(x-k,y) + \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} [(1-\nu)n^{-\nu} - n^{1-\nu} + (n+1)^{1-\nu}] s(x-n,y) \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^\nu s(x,y)}{\partial y^\nu} \cong \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} s(x,y) + \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)^{1-\nu} - 2k^{1-\nu}] s(x,y-k) + \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} [(1-\nu)n^{-\nu} - n^{1-\nu} + (n+1)^{1-\nu}] s(x,y-n) \quad 0 \leq \nu < 1 \quad (8)$$

为了能在8个对称方向上分别完成对图像  $s(x,y)$  的分数阶微分运算, 使微分模板具有抗旋转性能, 类似地, 可据式(6)分别构造出其他6个方向( $x$ 轴正方向  $W_{x+}$ 、 $y$ 轴正方向  $W_{y+}$ 、左上对角线  $W_{左上}$ 、右上对角线  $W_{右上}$ 、左下对角线  $W_{左下}$  和右下对角线  $W_{右下}$ )上的分数阶微分模板。由式(7)和(8)知, 当  $k \rightarrow n=2$  时, 模板的尺寸数为  $3 \times 3$ ; 当  $k \rightarrow n=4$  时, 模板尺寸数为  $5 \times 5$ ; 当  $k \rightarrow n=2m$  时, 模板的尺寸数为  $(2m+1) \times (2m+1)$ 。

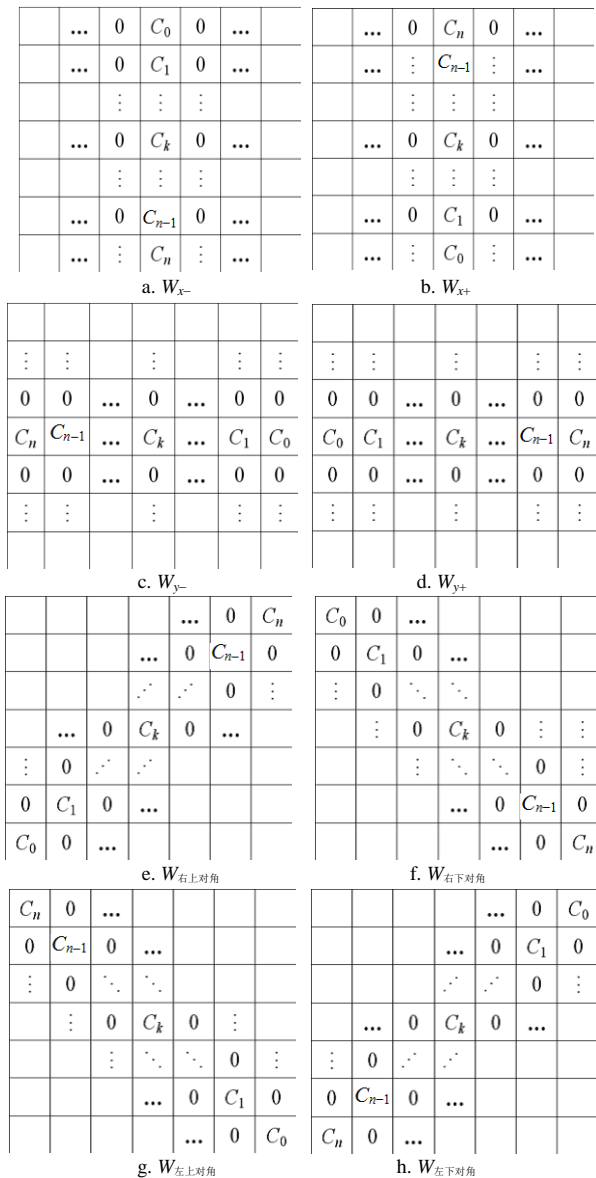


图1 8个方向上的Riemann-Liouville分数阶微分模板

图1中的 $C_0$ 为覆盖在感兴趣点 $s_0=s(x,y)$ 上的模板系数数值。根据式(6)，可推导出 $\nu$ 阶( $0<\nu<1$ )分数阶微分算子的模板系数为：

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \\ C_1 = \frac{2^{1-\nu} - 2}{\Gamma(2-\nu)} \\ \vdots \\ C_k = \frac{(k+1)^{1-\nu} - 2k^{1-\nu} + (k-1)^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \\ \vdots \\ C_{n-1} = \frac{n^{1-\nu} - 2(n-1)^{1-\nu} + (n-2)^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \\ C_n = \frac{(1-\nu)n^{-\nu} - n^{1-\nu} + (n-1)^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \end{cases}$$

由图1可知，可逐点移动图像和Riemann-Liouville分数阶微分算子卷积模板，实现数字图像的分数阶微分的空域滤波。与Grünwald-Letnikov微分方法<sup>[2,4-6]</sup>比较发现，它们都具有相同的结构，只不过对应位置的微分系数不同而已，因此可采用本文运算规则构造新的分数阶微分/积分算子及其数值运算规则和对应的电路结构。上述8个方向上的卷积运算规则分别为：

$$S_{x-}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=-2m}^0 \sum_{j=-m}^m W_{x-}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (9)$$

$$S_{x+}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=-m}^m W_{x+}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (10)$$

$$S_{y-}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-2m}^0 W_{y-}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (11)$$

$$S_{y+}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=0}^{2m} W_{y+}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (12)$$

$$S_{\text{左下对角}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=-2m}^0 W_{\text{左下对角}}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (13)$$

$$S_{\text{右上对角}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=-2m}^0 \sum_{j=0}^{2m} W_{\text{右上对角}}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (14)$$

$$S_{\text{左上对角}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=-2m}^0 \sum_{j=-2m}^0 W_{\text{左上对角}}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (15)$$

$$S_{\text{右下对角}}^{(\nu)}(x,y) = \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2m} W_{\text{右下对角}}(i,j)s(x+i,y+j) \quad (16)$$

由于对彩色图像进行分数阶微分且当阶次 $\nu$ 较大时，对R、G、B各分量的非线性增强幅度会破坏R、G、B这三个分量的相关性<sup>[4-5]</sup>，分数阶微分后的图像可能会出现色彩失真，而在HSI空间中因只对其中的I分量进行分数阶微分，则不会出现色彩失真情况，其数值运算规则同上。

## 2 实验仿真及结果分析

如果每个方向的模板尺寸为 $3 \times 3$ ，每个方向的系数分别为 $1/\Gamma(2-\nu)$ ， $(2^{1-\nu}-2)/\Gamma(2-\nu)$ ， $[(1-\nu)2^{-\nu}-2^{1-\nu}+1]/\Gamma(2-\nu)$ ，则卷积模板大小为 $5 \times 5$ 。本文采用 $5 \times 5$ 的分数阶微分模板及 $(5 \times 5, 0.8)$ 的高斯平滑。彩色图像首先转换至HSI空间，再对I分量进行分数阶微分，最后转换为RGB图像显示。由于熵可表示信息的不确定性，对图像而言，熵越大，其纹理和边缘信息越丰富，图像的质量也越好，其计算公式为：

$$\text{Entropy} = -\sum (p \ln p) \quad (17)$$

式中， $p$ 为图像直方图统计结果。

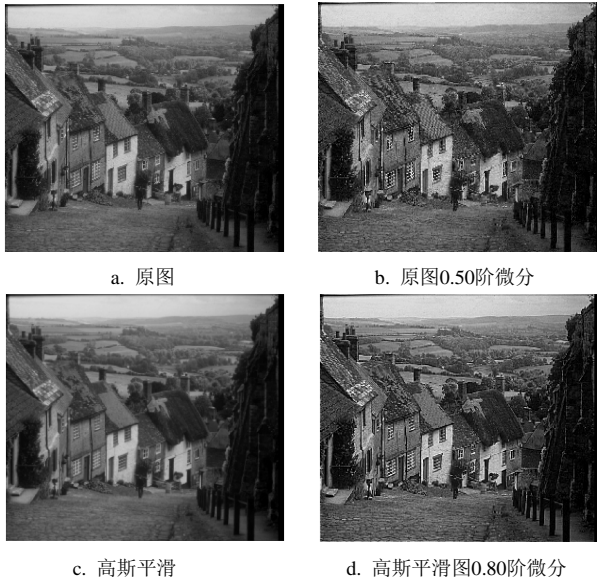


图2 goldhill灰度图像Riemann-Liouville分数阶微分结果

从视觉效果看, 分数阶微分后, goldhill图中屋顶的瓦片、房屋的门窗以及道路上的碎石具有更多的纹理信息, 图像更清晰, 如图3b所示; 对图像进行高斯平滑后, 屋顶的瓦片、房屋的门窗等的纹理信息丢失图像变得模糊, 如图3c所示; 经分数阶微分后, 瓦片、门窗等丢失的纹理信息恢复, 图像变得甚至比原图更清晰, 如图3d所示。因此, 分数阶微分可在一定程度上恢复图像丢失的纹理细节。

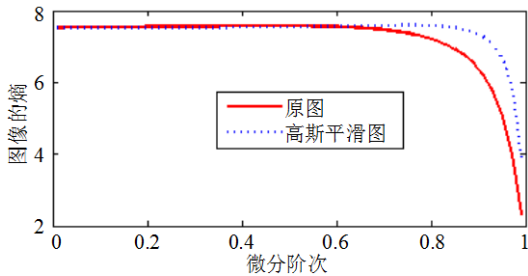


图3 不同阶次下goldhill图像的熵

从图3可知, 灰度图像的熵随着微分阶次 $\nu$ 的变化而逐渐增大, 说明图像的信息得到增强; 但到一定程度后会显著下降, 这是因为当微分阶次 $\nu$ 增大时, 分数阶微分对图像具有较明显的平滑作用, 使图像的纹理细节等信息丢失, 图像的熵显著减小。

通过大量的实验发现, 对于灰度图像, 可根据图像熵随阶次 $\nu$ 变化的曲线得到使goldhill图像分数阶微分效果最好的微分阶次范围。在该范围内, 图像微分后的视觉效果和熵信息都相差无几。因此, 根据图3可大概估计使goldhill图微分效果最好的阶次范围为0.5~0.55; 而对高斯平滑后的图像, 微分效果最好的范围为0.75~0.82。在本文的实验中,  $\nu$ 分别取0.50和0.80阶, 恰好在该范围内。



图4 彩色图像的Riemann-Liouville分数阶微分结果

对于彩色图像, 由于其包含的信息量远远大于灰度图像的信息量, 因此, 其分数阶微分效果明显优于灰度图像的微分效果; 当分数阶微分阶次 $\nu$ 较大时, 对R、G、B各分量的非线性增强幅度会破坏3个分量的相关性, 微分后的图像可能会出现色彩失真, 如图4b所示; 而对HSI空间的I分量单独进行增强, 则不会出现色彩失真。由于彩色图像包含3个通道的信息量, 对该3个通道均采用(5×5,0.8)的高斯平滑后, 部分通道纹理细节可能被平滑掉, 而其他通道纹理未被平滑掉, 因此分数阶微分后, 这些纹理信息依然能得到很好的增强, 如图4e和图4f所示。

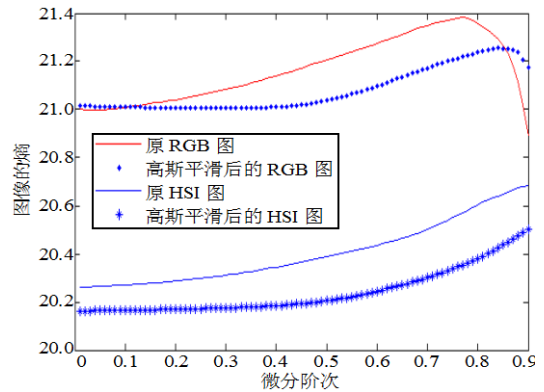


图5 不同阶次 $\nu$ 下彩色图像的熵

统计彩色图像的熵,从图5和图3可看出,彩色图像的熵随着微分阶次 $\nu$ 的变化同于灰度图像的熵随着微分阶次 $\nu$ 的变化。

大量实验表明,可根据彩色图像熵随阶次 $\nu$ 变化的曲线得到使图像微分效果最好的大致的微分阶次范围,但与灰度图像相比,该范围应该靠近数值较小的方向,如对于平滑后HSI图像的增强,由图5可知,分数阶微分阶次 $\nu$ 越高,其微分效果越差。实验表明, $\nu=0.9$ 的效果远不及 $\nu=0.79$ 时的效果(如图4f所示),这是因为当微分阶次较大时,分数阶微分对图像具有较明显的平滑作用,使图像的纹理、边缘等信息丢失。

### 3 结 论

本文在Riemann-Liouville分数阶微分的基础上构造了 $0\sim 1$ 阶Riemann-Liouville分数阶空域微分增强算子,用数字算法实现了该分数阶微分算子;并通过不同微分阶次下图像的熵的值确定使图像增强效果最好的微分阶次范围。仿真实验表明,该算子能明显地增强图像的纹理和边缘信息,增强后图像清晰度提高,视觉效果明显,对高斯平滑后的图像的增强效果也十分明显。

#### 参 考 文 献

- [1] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2007, 39(3): 124-132.  
PU Yi-fei. Application of fractional differential approach to digital image processing[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2007, 39(3): 124-132.
- [2] 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128-1135.  
PU Yi-fei, WANG Wei-xing. Fractional differential masks of digital image and their numerical implementation algorithms[J]. Acta Automatica Sinica (China), 2007, 33(11): 1128-1135.
- [3] 杨柱中, 周激流, 晏祥玉, 等. 基于分数阶微分的图像增强[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(3): 43-348.  
YANG Zhu-zhong, ZHOU Ji-liu, YAN Xiang-yu, et al. Image enhancement based on fractional differentials[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(3): 343-348.
- [4] PU Yi-fei, WANG Wei-xing, ZHOU Ji-liu, et al. Fractional differential approach to detecting textural features of digital image and its fractional differential filter implementation[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2008, 51(9): 1319-1339.
- [5] PU Yi-fei, ZHOU Ji-liu, YUAN Xiao. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(2): 491-511.
- [6] ANH V V, MCVINISH R. Fractional differential equations driven by Lévy noise[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2003, 16(2): 97-119.
- [7] ALMEIDA L B.. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans on Signal Process, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [8] LOHMANN A. W. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. J Opt Soc Amer, 1993, 10(10): 2181-2186.
- [9] OZAKTASH M, ZALEVSKY Z, KUTAY M A. The fractional fourier transform with applications in optics and signal processing[M]. New York: Wiley, 2000: 201-220.
- [10] 袁晓, 陈向东, 李齐良, 等. 微分算子与子波构造[J]. 电子学报, 2002, 30(5): 769-773.  
YUAN Xiao, CHEN Xiang-dong, LI Qi-liang, et al. Differential operator and the construction of wavelet[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(5): 769-773.
- [11] 蒲恬, 倪国强, 李熙莹. 基于视觉神经元ON-OFF模型的图像增强[J]. 中国图象图形学报: A版, 2003, 8(5): 522-526.  
PU Tian, NI Guo-qiang, LI Xi-ying. Image enhancement based on the ON-OFF model of visual neurons[J]. Journal of Image and Graphics: A, 2003, 8(5): 522-526.
- [12] MATHIEU B, Melchior P, OUSTALOUP A, et al. Fractional differentiation for edge detection[J]. Signal Processing, 2003, 83(2003): 2421-2432.
- [13] KEITH B O, SPANIER J. The FRACTIONAL CALCULUS: THEORY AND APPLICATIONS OF DIFFERENTIATION AND INTEGRATION TO ARBITRARY ORDER[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [14] KENNETH S M. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1993.

编辑 张俊